

Cahier de Vacances J'entre en Terminale Spé Maths



Jai20enMaths

Exercice 1



Discriminant et factorisation

Factoriser les trinômes du second degré suivant :

1 $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

2 $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

3 $f(x) = 2x^2 + 3x + 10$

Solution vidéo ↓



Exercice 2



Équations bicarrées et équations avec changement de variable.

Résoudre les équations suivantes avec un changement de variable approprié.

1 $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

2 $2x - \sqrt{x} - 6 = 0$

Solution vidéo ↓



Exercice 3



Dérivation et tableau de variations

1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 1$. Dresser le tableau de variation de f .

2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 4)(5x - 2)$. Dresser le tableau de variation de f .

3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-4x + 1}{2x - 5}$. Dresser le tableau de variation de f .

4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 9x - 3$. Dresser le tableau de variation de f .

Solution vidéo ↓



Exercice 4

Dérivées des fonctions composées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1 $f(x) = (4x - 3)^2$

2 $f(x) = 5(-2x + 12)^5$

3 $f(x) = \sqrt{5x - 3}$

4 $f(x) = 3\sqrt{2x - 5}$

Solution vidéo ↓



Exercice 5

Une étude d'une fonction rationnelle.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-2; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$$

et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-2; +\infty[$.

1 Étudier le signe de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + 4x + 3$.

2 Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{P(x)}{(x + 2)^2}$$

où f' est la fonction dérivée de f .

3 Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-2; +\infty[$ et construire le tableau de variations de la fonction f sur $]-2; +\infty[$.

4 Donner le minimum de la fonction f sur $]-2; +\infty[$ et la valeur pour laquelle il est atteint (on donnera les valeurs exactes).

5 Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 2.

Exercice 6

Propriétés algébriques et fonction exponentielle

Simplifier les expressions suivantes :

1 $A = \frac{e^2 \times (e^5)^{-2} \times e^4}{(e^3 \times e^{-6})^3}$

2 $B(x) = \frac{e^{3x-5} \times e^{x+3}}{(e^{3x-4})^3 \times e^{-5x+1}}$

Solution vidéo ↓



Exercice 7

Résoudre des équations avec les exponentielles .

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1 $e^{2x+1} = e^{5x-7}$.

2 $e^{2x+1} = 1$.

3 $e^{3x-6} \times e^{x-5} = \frac{e^{9x-2}}{e^{3x-3}}$.

4 $e^{4x^2} = \frac{1}{e^{-9}}$.

Solution vidéo ↓



Exercice 8

Dérivées et fonction exponentielle

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1 $f(x) = 3e^x - 5x + 2$

2 $f(x) = 2xe^x$

3 $f(x) = (-5x + 2)e^x$

4 $f(x) = \frac{2x - 3}{e^x}$

Solution vidéo ↓



Exercice 9

Variation et fonction exponentielle

1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 7)e^x$. Dresser le tableau de variation de f .2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2e^x$. Dresser le tableau de variation de f .

Solution vidéo ↓



Exercice 10

Dérivées de la forme e^{ax+b}

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1 $f(x) = 3e^{-2x+3} + 4x$

2 $f(x) = -5e^{3x+1} - 2x$

3 $f(x) = 3xe^{-4x}$

4 $f(x) = (-5x + 2)e^{-4x+1}$

Solution vidéo ↓



Exercice 11

Étudier les variations d'une fonction de la forme $x \mapsto e^{ax+b}$

Solution vidéo ↓

- 1 Étudier les variations de la fonction f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{5x-1}$.
- 2 Étudier les variations de la fonction f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-2x+4}$.



Exercice 12

Étude complète d'une fonction exponentielle.

Solution vidéo ↓

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère du plan.



- 1 Déterminer les coordonnées du point A , point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.
- 2 La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe-t-elle l'axe des abscisses? Justifier la réponse.
- 3 On note f' la dérivée de la fonction f sur $[0; +\infty[$. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$.
- 4 Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$. En déduire le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.
- 5 On note $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse 1,6. La tangente $\mathcal{T}$ passe-t-elle par l'origine du repère? Justifier la réponse.
- 6

Exercice 13

Tout ce qu'il faut savoir sur les suites arithmétiques.

Solution vidéo ↓

- 1 Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$
Calculer u_1 ; u_2 et u_3 . Que remarquez-vous?
- 2 Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 2 + 4n$. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 . Que remarquez-vous?
- 3 La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et telle que $u_1 = 7$. Calculer u_6 .
- 4 La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 2$ et telle que $u_4 = 5$. Calculer u_{13} .
- 5 Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 2 + 1,5n$. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) ?
- 6 Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 10 - 2n$. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) ?



- 7 Soit une suite arithmétique (u_n) de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 4$. Calculer : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.

Exercice 14



Tout ce qu'il faut savoir sur les suites géométriques.

Solution vidéo ↓

- 1 Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

Calculer $u_1; u_2$ et u_3 . Que remarquez-vous ?

- 2 Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 2 \times 3^n$. Calculer $u_1; u_2$ et u_3 . Que remarquez-vous ?

- 3 La suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et telle que $u_1 = 1024$. Calculer u_6 .

- 4 La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 2$ et telle que $u_6 = 4$. Calculer u_{11} .

- 5 La suite (u_n) est géométrique telle que $u_{10} = 2$ et $u_{12} = 32$. Calculer la raison q .

- 6 Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 3 \times 2^n$. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) ?

- 7 Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = -4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) ?

- 8 Soit une suite géométrique (u_n) de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{4}$. Calculer : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_8$.

Exercice 15



Suite arithmético-géométrique

Soient $\begin{cases} u_0 = 1500 \\ u_{n+1} = 0,9u_n + 100 \end{cases}$ et $v_n = u_n - 1000$

- 1 Calculer u_1 et u_2 .

- 2 La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier les réponses.

- 3 Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 dont on précisera le premier terme.

- 4 Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .

- 5 En déduire, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .

Exercice 16



Déterminer l'équation cartésienne d'une droite à partir de deux points.

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- 1 On considère deux points $A(2; 4)$ et $B(-1; 3)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .

Solution vidéo ↓





Equation cartésienne d'1 droite à l'aide d'un vecteur normal et d'1 point.

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- 1 Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point $A(1; 4)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solution vidéo ↓



Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice d'un segment.

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
On considère les points $A(6; -1)$, $B(3; 0)$ et $C(2; 4)$.

- 1 Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[BC]$.

Solution vidéo ↓



Déterminer une équation cartésienne d'une hauteur d'un triangle .

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
On considère les points on considère les points $A(-5; 2)$, $B(-2; 4)$ et $C(4; 0)$.

- 1 Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B du triangle ABC .

Solution vidéo ↓



Déterminer une équation cartésienne d'une médiane d'un triangle.

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
On considère les points $A(0; 2)$, $B(4; 0)$ et $C(3; 4)$.

- 1 Déterminer une équation cartésienne de la médiane issue de C dans le triangle ABC .

Solution vidéo ↓



Exercice 21



Résolution système linéaire - Méthode par substitution.

Solution vidéo ↓

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1 Résoudre le système d'équations par la méthode de substitution :

$$\begin{cases} 5x + y = 7 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$



Exercice 22



Résolution système linéaire - Méthode par combinaison.

Solution vidéo ↓

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1 Résoudre le système d'équations par la méthode de combinaison :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 4x - 5y = -3 \end{cases}$$



Exercice 23



Linéarité de l'espérance et additivité de la variance .

Solution vidéo ↓

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.

Soit X une variable aléatoire telle que $E(X) = 6$ et $V(X) = 2$.

Soit Y une variable aléatoire telle que $E(Y) = 3$ et $V(Y) = 1$.

1 Calculer $E(X + Y)$.

2 Calculer $E(3X)$.

3 Calculer $E(2Y + 4)$.

4 $V(X + Y)$.

5 $V(2X)$.

6 $V(2X + 5)$.





Solution vidéo ↓



Durant une fête foraine, une urne contient dix boules.

Chaque boule est soit verte, soit rouge, indiscernable au toucher.

Un jeu est proposé aux personnes présentes à la fête foraine. Pour y participer le joueur doit d'abord payer 1 euro.

Ensuite,

- le joueur tire une première boule qu'il donne au forain, celui-ci note sa couleur puis remet la boule dans l'urne ;
- le joueur tire une deuxième boule, le forain note la couleur de ce deuxième tirage et remet à nouveau la boule dans l'urne.

Voici les récompenses qu'il obtient :

- si le joueur a tiré deux boules rouges, il reçoit 3 euros ;
- si le joueur a tiré deux boules vertes, il reçoit 1 euro ;
- sinon il ne reçoit pas d'argent.

Partie A

Dans cette partie, on considère que cette urne contient 1 boule rouge et 9 boules vertes.

On note :

- R_1 l'événement : «La première boule tirée est rouge.»
- R_2 l'événement : «La deuxième boule tirée est rouge.»

1 Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue après les deux tirages et les frais de participation au jeu de 1 euro.

2 Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X .

3 Montrer que $P(X = -1) = \frac{18}{100}$.

4 Recopier sur votre feuille et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X :

k			
$P(X = k)$			

5 Calculer l'espérance de X . Interpréter le résultat.

Partie B

Dans cette partie, on considère que cette urne contient maintenant n boules rouges et $10 - n$ boules vertes où n est un nombre entier naturel avec $0 \leq n \leq 10$. On note Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique après les deux tirages.

1 Démontrer que $E(Y) = \frac{4n^2 - 20n}{100}$.

2 Pour combien de boules rouges dans l'urne le jeu est-il équitable entre le joueur et le forain ?

Exercice 25

Exercice type sur les probabilités conditionnelles

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs :

35% des plants proviennent de l'horticulteur H1 et 25% de l'horticulteur H2 et le reste de l'horticulteur H3.

Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles. La livraison de l'horticulteur H1

comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H3 seulement 30%. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock. On envisage les événements suivants :

H1 : l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H1 ,

H2 : l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H2 ,

H3 : l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H3 ,

C : l'arbre choisi est un conifère »,

F : l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

Solution vidéo ↓



- 1 Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
- 2 Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H3.
- 3 Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525 .
- 4 L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H1 ? On arrondira à 10^{-3} .
- 5 Les événements H1 et C sont-ils indépendants ?

Exercice 26

Les différentes expressions du produit scalaire

- 1 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points $A(1; 2)$, $B(-2; 3)$ et $C(0; 4)$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- 2 Soit un triangle ABC tel que : $AB = 7$, $AC = 5$ et $BC = 6$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- 3 ABCD est un parallélogramme tel que : $AB = 4$; $BD = 3$ et $AD = 6$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- 4 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = 6$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 9$. Calculer $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

Solution vidéo ↓



10

Exercice 27



Exercice type : Géométrie repérée et Produit scalaire

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan, on considère les points $A(-2; 1)$, $B(1; 2)$ et $E(0; -5)$. On appelle $\mathcal{C}$ le cercle de centre A passant par B .

Solution vidéo ↓



- 1 Justifier qu'une équation du cercle $\mathcal{C}$ est $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$.
- 2 Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$.
- 3 Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (AE) ?
- 4 Déterminer une équation cartésienne de la droite (AE) .
- 5 Calculer les coordonnées des points d'intersection de (AE) et du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 28



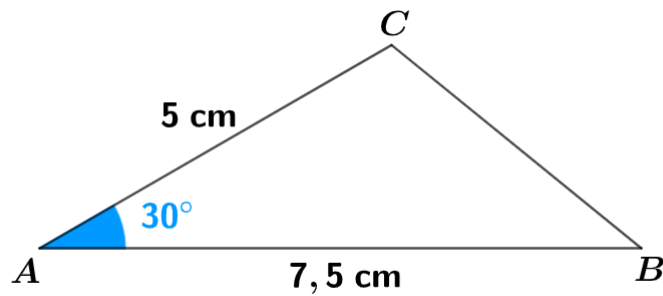
Formule d'Al-Kashi. Calculer un côté .

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

Solution vidéo ↓



- 1 Calculer la mesure du segment $[CB]$ à 10^{-2} près.



Exercice 29



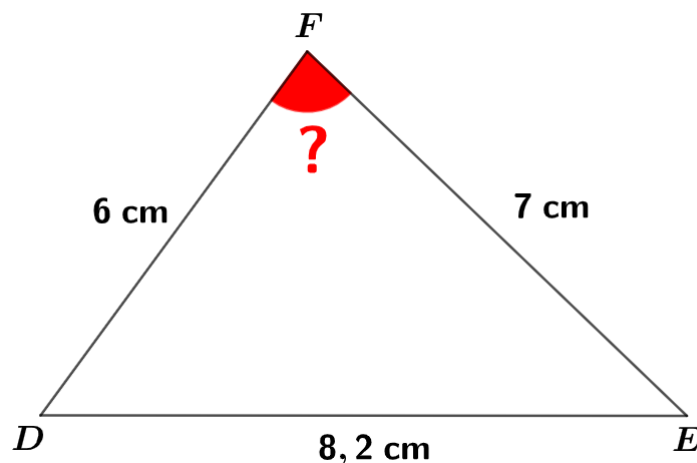
Formule d'Al-Kashi. Calculer un angle .

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

Solution vidéo ↓



- 1 Calculer une mesure de l'angle $\widehat{DEF}$ à $0,01^\circ$ près.



Exercice 30

Utiliser la formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Solution vidéo ↓

1 Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ et $\cos(x) = \frac{1}{4}$. Calculer $\sin(x)$.

2 Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et $\sin(x) = \frac{1}{3}$. Calculer $\cos(x)$.



Exercice 31



Etudier la périodicité d'une fonction trigonométrique

Solution vidéo ↓

1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = 2\sin^2(2x) + \sin(2x) + 3$.
 Démontrer que f est une fonction π -périodique autrement dit
 démontrer que f est périodique de période π .



Exercice 32



Étudier les variations d'une fonction trigonométrique partie 1

Solution vidéo ↓

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3\sin(x) - 5x + 2$.

1 Déterminer l'expression de la dérivée f' de f .

2 Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x .

3 En déduire le tableau de variation de f .



Exercice 33



Étudier les variations d'une fonction trigonométrique partie 2

Solution vidéo ↓

Soit la fonction f définie sur $[0; 2\pi]$ par : $f(x) = 2\sin(x) - x$.

1 Déterminer l'expression de la dérivée f' de f .

2 Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x .

3 En déduire le tableau de variation de f .



Exercice 34



Étudier les variations d'une fonction trigonométrique partie 3

Solution vidéo ↓

Soit la fonction f définie sur $[-\pi; \pi]$ par : $f(x) = 2\cos(x) + \sqrt{2}x$.

1 Déterminer l'expression de la dérivée f' de f .

2 Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x .

3 En déduire le tableau de variation de f .

