

La Fonction exponentielle

Sujets Type bac



Jai20enMaths

Quatre exos types pour préparer le BAC :)

Exercice 1



Type bac : Fonction Exponentielle, Continuité et Intégrale

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

Solution vidéo ↓



Partie A

- 1 Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues). En déduire le signe de $g(x)$.
- 2 Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
- 3 On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = e^{-x}g(x).$$

- 4 En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 5 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
- 6 Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
- 7 Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T .

Partie B

Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = (-x - 1)e^{-x}.$$

- 1 Démontrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = xe^{-x}$.
- 2 On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite T et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

Exercice 2

Type bac : Fonction Exponentielle, Continuité

Solution vidéo ↓

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x + 2)e^{x-4} - 2$.

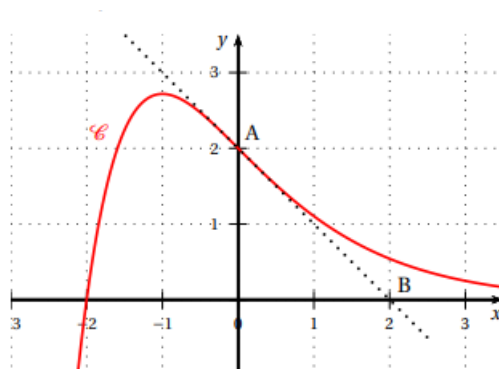
- 1 Déterminer la limite de g en $+\infty$.
- 2 Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2 .
- 3 On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa dérivée. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g .
- 4 Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
- 5 En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
- 6 Al'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α .



Partie B : Etude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x^2e^{x-4}$.

- 1 Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
- On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. On admet par ailleurs que, pour tout réel x , $f'(x) = -xg(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A.
- 1 Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - 2 Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0; +\infty[$ est égal à $\frac{\alpha^3}{\alpha + 2}$.



Exercice 3



Type bac : Fonction Exponentielle, Convexité

Solution vidéo ↓



On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Partie 1 : Etude d'une fonction auxiliaire

Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A , donner par lecture graphique :

1 La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.

2 Conjecturer la convexité de f .

Partie 2 : Etude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (ax + b)e^{-x}$. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

3 En utilisant l'expression de la fonction f , exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b .

4 Donner, pour tout réel x , l'expression de $f'(x)$.

5 Exprimer $f'(0)$ en fonction de a .

6 En utilisant les questions précédentes, déterminer a , puis en déduire l'expression de $f(x)$.

7 Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

8 Donner, pour tout réel x , l'expression de $f'(x)$.

9 Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau complet des variations de f sur $\mathbb{R}$.

10 Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

11 Étudiez la convexité de f sur $\mathbb{R}$.



Solution vidéo ↓



Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1 Affirmation 1 : Pour tout réel x : $1 - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{2}{1 + e^{-x}}$.

2 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

Affirmation 2 : L'équation $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

Affirmation 3 : L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en un seul point.

4 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x (1 - x^2)$.

Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.

5 Affirmation 5 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + x} = 0$.

6 Affirmation 6 : Pour tout réel x , $1 + e^{2x} \geq 2e^x$.