La fonction exponentielle



Jai20enMaths

La fonction exponentielle

1 Définition de la fonction exponentielle

Définition 1.1 Il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que f' = f et f(0) = 1.

Cette fonction f s'appelle le fonction exponentielle potée $g + \lambda$ e^x

Cette fonction f s'appelle la fonction exponentielle, notée $x \mapsto e^x$.

On note alors $(e^x)' = e^x$

 $e^0 = 1$

2 Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Pour tous réels a et b, et pour tout entier naturel n:

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad e^{na} = (e^a)^n$$

Exemple 1



Soit x un réel. Simplifier les écritures suivantes :

1. $A(x) = e^{4x+2} \times e^{-x+3}$.

2. $B(x) = \frac{e^{-2x+1}}{e^{-5x+6}}$

Corrigé:

1. $A(x) = e^{4x+2} \times e^{-x+3}$. Nous allons appliquer ici la formule $e^{a+b} = e^a \times e^b$

 $A(x) = e^{4x+2+(-x+3)}$.

 $A(x) = e^{3x+5}$ 2. $B(x) = \frac{e^{-2x+1}}{e^{-5x+6}}$. Nous allons appliquer ici la formule $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

 $B(x) = e^{-2x+1-(-5x+6)}$.



$$B(x) = e^{-2x+1+5x-6}$$
.
 $B(x) = e^{3x+7}$.





Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

Solution vidéo ↓



Simplifier les expressions suivantes :

- $1 A = e^2 \times e^6 .$
- $B = \frac{e^4}{e^{-2}}$.
- $C = (e^3)^2$.
- 4 Soit x un réel, simplifier : $D = e^{2x+4} \times e^{3x-9}$
- **5** Soit x un réel, simplifier : $E = \frac{\left(e^{2x+1}\right)^2 \times e^{5x+3}}{e^{x-6}}$

Etude de la fonction exponentielle

- **1** Signe de la fonction exponentielle
 - **Définition 1.2** La fonction exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} .
- Sens de variation de la fonction exponentielle
- **3** Equations et inéquations
 - **Définition 1.4** Pour tous réels a et b et de la stricte monotonie de la fonction exponentielle, on a les propriétés suivantes :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \quad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

LA FONCTION EXPONENTIELLE

Exemple



Soit x un réel. Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1.
$$e^{4x+1} - e^{-2x+3} = 0$$

2.
$$e^{2x+1} - e^{-5x+3} > 0$$

Corrigé:

1.
$$e^{4x+1}-e^{-2x+3}=0 \text{ \'equivaut successivement \'a}:$$

$$e^{4x+1}=e^{-2x+3}$$

$$4x + 1 = -2x + 3$$

$$4x + 2x = 3 - 1$$

$$6x = 2$$

$$x = \frac{2}{6}$$

$$x = \frac{1}{3}$$
. La solution de l'équation est alors $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$e^{2x+1} - e^{-5x+3} \ge 0$$
 équivaut successivement à :

$$e^{2x+1} > e^{-5x+3}$$

$$2x + 1 \ge -5x + 3$$

$$2x + 5x \ge 3 - 1$$

$$7x \ge 2$$

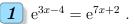
$$x \ge \frac{2}{7}$$
. L'ensemble des solution est : $S = \left[\frac{2}{7}; +\infty\right[$

Exercice



Résoudre des équations avec les exponentielles .

Résoudre, dans \mathbb{R} , les équations suivantes :



$$2 e^{3x-4} \times e^{5x-2} = e^{9x+2}$$
.

$$\mathbf{3}$$
 $e^{x^2} = e^9$.

$$4 e^{3x-4} = 1$$
.

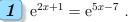
$$\boxed{5} e^{6x-9} = -e^{2x+8}$$

Exercice



Résoudre des équations avec les exponentielles .

Résoudre, dans \mathbb{R} , les équations suivantes :



$$e^{2x+1} = 1$$
.

$$3 e^{3x-6} \times e^{x-5} = \frac{e^{9x-2}}{e^{3x-3}}.$$

$$4 e^{4x^2} = \frac{1}{e^{-9}}$$
.



Solution vidéo ↓

Solution vidéo ↓









Dérivée de la fonction exponentielle

- **Définition 1.5** Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x$. f est dérivable g sur \mathbb{R} .
 - Pour tout réel x, on a : $f'(x) = e^x$

Exemple



On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2e^x - 5x + 3$. Calculer la dérivée f' de f.

Corrigé:

f est dérivable sur \mathbb{R} . On a : $f'(x) = 2e^x - 5$





Dérivées avec la fonction exponentielle Partie 1.

Solution vidéo ↓



Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} .

$$(1) f(x) = 5x + 4e^x - 6 .$$

$$(2) f(x) = -3e^x - 4x^2 + 5x - 1 .$$

$$\mathbf{3} f(x) = x e^x.$$

Exercice 5



Dérivées avec la fonction exponentielle Partie 2.

Solution vidéo ↓

Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} .

$$f(x) = 3e^x - 5x + 2.$$

$$f(x) = 2xe^x.$$

$$f(x) = (-5x + 2)e^x$$
.

4
$$f(x) = \frac{2x-3}{e^x}$$
.

5 Dérivée de la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

Définition 1.6 Soit u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(e^u)'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$





On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -3e^{2x^2}$. Calculer la dérivée f' de f.

Corrigé:

f est dérivable sur \mathbb{R} . Ici $u(x) = 2x^2$ et donc u'(x) = 4x.

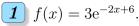
On a: $f'(x) = -3 \times 4xe^{2x^2}$ $Ainsi: f'(x) = -12xe^{2x^2}$

Exercice



Solution vidéo ↓

On considère que les fonctions f; g et p sont dérivables sur \mathbb{R} . Calculer la dérivée des fonctions dans chacun des cas.



2
$$g(x) = 5e^{x^2 - 4}$$
.



Variation et fonction exponentielle

Exemple



On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (2x - 3)e^x$.

- 1. Déterminer l'expression de la dérivée f' de f.
- 2. Etudier le signe de f'(x) en fonction de x.
- 3. En déduire le tableau de variation de f.

Corrigé:

1.

f est dérivable sur \mathbb{R} .

Ici on reconnaît la forme : (uv)' = u'v + uv' avec u(x) = 2x - 3 et $v(x) = e^x$.

Ainsi : u'(x) = 2 et $v'(x) = e^x$.

Il vient alors que : $f'(x) = 2e^x + (2x - 3)e^x \Leftrightarrow f'(x) = e^x(2 + 2x - 3)$.

$$f'(x) = e^x(2x - 1)$$

Pour tout réel x, on a $e^x > 0$.

De plus:

$$2x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow 2x \ge 1 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}$$
.

3.

Nous traduisons toutes ces informations dans le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
signe de e^x		+		+
signe de $2x-1$		_	0	+
signe de $f'(x)$		_	0	+
variation de $f(x)$			*	







Étudier les variations d'une fonction de la forme $x \mapsto (ax + b)e^x$

Solution vidéo ↓

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (3x - 4)e^x$.

- 1 Déterminer l'expression de la dérivée f' de f.
- **2** Etudier le signe de f'(x) en fonction de x.
- 3 En déduire le tableau de variation de f.

Exercice 8



Étudier les variations d'une fonction de la forme $x\mapsto (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^x$

Solution vidéo \



Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 e^x$.

- 1 Déterminer l'expression de la dérivée f' de f.
- **2** Etudier le signe de f'(x) en fonction de x.
- 3 En déduire le tableau de variation de f.

Limites et fonction exponentielle



Définition 1.7

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ \lim_{x \to -\infty}}} e^x = +\infty$$

Exemple



Calculer
$$\lim_{x \to +\infty} (2x+3) (5-2e^x)$$

Corrigé :

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to +\infty}} 2x + 3 = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to +\infty}} 5 - 2e^x = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{par produit : } \lim_{x \to +\infty} (2x + 3) \left(5 - 2e^x \right) = -\infty \end{array} \right.$$

Croissances comparées

Définition 1.8

 $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et pour tout entier } n, \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

 $\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$ et pour tout entier $n,\lim_{x\to +\infty}\frac{x^n}{\mathrm{e}^x}=0$. On déduit ce résultat à l'aide de la formule précédente.

 $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0 \text{ et pour tout entier } n, \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Exemple



Calculer
$$\lim_{x\to +\infty} 3x - e^x + 1$$

Corrigé:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to +\infty}} 3x + 1 = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to +\infty}} -e^x = -\infty$$

On rencontre ici une forme indéterminée.

Pour lever cette indétermination, nous allons factoriser l'expression par x

Cela donne:

$$\lim_{x \to +\infty} 3x - e^x + 1 = \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{3x - e^x + 1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} 3x - e^x + 1 = \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{3x}{x} - \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} 3x - e^x + 1 = \lim_{x \to +\infty} x \left(3 - \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right)$$

On a alors:

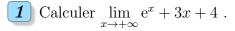
On a alors:
$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to +\infty}} x = +\infty \\ \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to +\infty}} 3 - \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} = -\infty$$
 par produit:
$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to +\infty}} x \left(3 - \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}\right) = -\infty.$$
 Finalement:
$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to +\infty}} 3x - e^x + 1 = -\infty$$

Exercice



Tout savoir sur les limites avec la fonction exponentielle.

Déterminer les limites suivantes :



2 Calculer
$$\lim_{x \to -\infty} -2e^x + 5x^2 + 3$$
.

3 Calculer
$$\lim_{x \to +\infty} 2e^x - 5x^2 - 3x - 2$$
.

5 Calculer
$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x-2}}$$
.

Solution vidéo \downarrow

LA FONCTION EXPONENTIELLE









Limites et fonctions composées. (exponentielle).

- 2 Calculer $\lim_{x \to -\infty} e^{x^2 + 3}$.

Solution vidéo ↓

