La fonction exponentielle

Jai20enMaths

I La fonction exponentielle

1 Définition de la fonction exponentielle

Définition 1.1 Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction f s'appelle la fonction exponentielle, notée $x \mapsto \mathrm{e}^x$.
On note alors $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
$\mathrm{e}^0 = 1$

2 Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Pour tous réels a et b, et pour tout entier naturel n :

$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$	$\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$	$\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$	$\mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n$

Exemple 1

Soit x un réel. Simplifier les écritures suivantes :
1. $A(x) = \mathrm{e}^{4x+2} \times \mathrm{e}^{-x+3}$.
2. $B(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x+1}}{\mathrm{e}^{-5x+6}}$.

Corrigé :

1. $A(x) = \mathrm{e}^{4x+2} \times \mathrm{e}^{-x+3}$. Nous allons appliquer ici la formule $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$
$A(x) = \mathrm{e}^{4x+2+(-x+3)}$.
$A(x) = \mathrm{e}^{3x+5}$
2. $B(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x+1}}{\mathrm{e}^{-5x+6}}$. Nous allons appliquer ici la formule $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$
$B(x) = \mathrm{e}^{-2x+1-(-5x+6)}$.

$B(x) = \mathrm{e}^{-2x+1+5x-6}$.
$B(x) = \mathrm{e}^{3x+7}$.

Exercice 1 Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

Solution vidéo ↓

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = e^2 \times e^6$.
2. $B = \dfrac{e^4}{e^{-2}}$.
3. $C = (e^3)^2$.
4. Soit x un réel, simplifier : $D = e^{2x+4} \times e^{3x-9}$
5. Soit x un réel, simplifier : $E = \dfrac{\left(e^{2x+1}\right)^2 \times e^{5x+3}}{e^{x-6}}$

II Etude de la fonction exponentielle

1 Signe de la fonction exponentielle

Définition 1.2 La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2 Sens de variation de la fonction exponentielle

Définition 1.3 La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3 Equations et inéquations

Définition 1.4 Pour tous réels a et b et de la stricte monotonie de la fonction exponentielle, on a les propriétés suivantes :

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$	$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Exemple 2

Soit x un réel. Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:
1. $e^{4x+1} - e^{-2x+3} = 0$
2. $e^{2x+1} - e^{-5x+3} \geq 0$

Corrigé :

1.
$e^{4x+1} - e^{-2x+3} = 0$ équivaut successivement à :
$e^{4x+1} = e^{-2x+3}$
$4x + 1 = -2x + 3$
$4x + 2x = 3 - 1$
$6x = 2$
$x = \frac{2}{6}$
$x = \frac{1}{3}$. La solution de l'équation est alors $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

2.
$e^{2x+1} - e^{-5x+3} \geq 0$ équivaut successivement à :
$e^{2x+1} \geq e^{-5x+3}$
$2x + 1 \geq -5x + 3$
$2x + 5x \geq 3 - 1$
$7x \geq 2$
$x \geq \frac{2}{7}$. L'ensemble des solution est : $S = \left]\frac{2}{7}; +\infty\right[$

Exercice 2 Résoudre des équations avec les exponentielles .

Solution vidéo ↓

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $e^{3x-4} = e^{7x+2}$.
2. $e^{3x-4} \times e^{5x-2} = e^{9x+2}$.
3. $e^{x^2} = e^{9}$.
4. $e^{3x-4} = 1$.
5. $e^{6x-9} = -e^{2x+8}$

Exercice 3 Résoudre des équations avec les exponentielles .

Solution vidéo ↓

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $e^{2x+1} = e^{5x-7}$.
2. $e^{2x+1} = 1$.
3. $e^{3x-6} \times e^{x-5} = \frac{e^{9x-2}}{e^{3x-3}}$.
4. $e^{4x^2} = \frac{1}{e^{-9}}$.

4 Dérivée de la fonction exponentielle

Définition 1.5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a : $f'(x) = e^x$

Exemple 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^x - 5x + 3$.
Calculer la dérivée f' de f.

Corrigé :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a : $f'(x) = 2e^x - 5$

Exercice 4 Dérivées avec la fonction exponentielle Partie 1.

Solution vidéo ↓

Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 5x + 4\mathrm{e}^x - 6$.
2. $f(x) = -3\mathrm{e}^x - 4x^2 + 5x - 1$.
3. $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

Exercice 5 Dérivées avec la fonction exponentielle Partie 2.

Solution vidéo ↓

Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 3\mathrm{e}^x - 5x + 2$.
2. $f(x) = 2x\mathrm{e}^x$.
3. $f(x) = (-5x + 2)\mathrm{e}^x$.
4. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{\mathrm{e}^x}$.

5 Dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

Définition 1.6 Soit u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(e^u)'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

Exemple 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3\mathrm{e}^{2x^2}$.
Calculer la dérivée f' de f.

Corrigé :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ici $u(x) = 2x^2$ et donc $u'(x) = 4x$.

On a : $f'(x) = -3 \times 4x\mathrm{e}^{2x^2}$
Ainsi : $f'(x) = -12x\mathrm{e}^{2x^2}$

Exercice 6

Solution vidéo ↓

On considère que les fonctions f ; g et p sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Calculer la dérivée des fonctions dans chacun des cas.

1. $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x+6}$.
2. $g(x) = 5\mathrm{e}^{x^2-4}$.
3. $p(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

6 Variation et fonction exponentielle

Exemple 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-3)\mathrm{e}^x$.
1. Déterminer l'expression de la dérivée f' de f.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
3. En déduire le tableau de variation de f.

Corrigé :

1.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Ici on reconnaît la forme : $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = 2x-3$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
Ainsi : $u'(x) = 2$ et $v'(x) = e^x$.
Il vient alors que : $f'(x) = 2\mathrm{e}^x + (2x-3)\mathrm{e}^x \Leftrightarrow f'(x) = \mathrm{e}^x(2+2x-3)$.
$f'(x) = \mathrm{e}^x(2x-1)$
2.
Pour tout réel x, on a $e^x > 0$.
De plus :

$$2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

3.
Nous traduisons toutes ces informations dans le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de e^x		$+$		$+$	
signe de $2x-1$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variation de $f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice 7 Étudier les variations d'une fonction de la forme $x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^x$

Solution vidéo ↓

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x-4)\mathrm{e}^x$.

1. Déterminer l'expression de la dérivée f' de f.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
3. En déduire le tableau de variation de f.

Exercice 8 Étudier les variations d'une fonction de la forme $x \mapsto (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^x$.

Solution vidéo ↓

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$.

1. Déterminer l'expression de la dérivée f' de f.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
3. En déduire le tableau de variation de f.

III Limites et fonction exponentielle

1 Les limites usuelles

Définition 1.7

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

Exemple 6

Calculer $\lim_{x \to +\infty} (2x+3)(5-2e^x)$

Corrigé :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim_{x \to +\infty} 2x+3 & = & +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} 5-2e^x & = & -\infty \end{array}\right\} \text{par produit : } \lim_{x \to +\infty} (2x+3)(5-2e^x) = -\infty$$

2 Croissances comparées

Définition 1.8

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$. On déduit ce résultat à l'aide de la formule précédente.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$

Exemple 7

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x - e^x + 1$

Corrigé :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to+\infty} 3x+1 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -e^x & = & -\infty \end{array}\right\}$$

On rencontre ici une forme indéterminée.

Pour lever cette indétermination, nous allons factoriser l'expression par x

Cela donne :

$$\lim_{x\to+\infty} 3x - e^x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{3x - e^x + 1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x - e^x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{3x}{x} - \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x - e^x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x\left(3 - \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}\right)$$

On a alors :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to+\infty} x & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3 - \dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x} & = & -\infty \end{array}\right\} \text{par produit : } \lim_{x\to+\infty} x\left(3 - \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x - e^x + 1 = -\infty$

Exercice 9

Tout savoir sur les limites avec la fonction exponentielle.

Solution vidéo ↓

Déterminer les limites suivantes :

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + 3x + 4$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} -2\mathrm{e}^x + 5x^2 + 3$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\mathrm{e}^x - 5x^2 - 3x - 2$.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x - 4x^2)\,\mathrm{e}^x$.
5. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}}$.

Exercice 10 Limites et fonctions composées. (exponentielle).

Solution vidéo ↓

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{2}{x+1}}$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x^2+3}$.