

Calcul Intégral

Sujets Type bac



Jai20enMaths

I Sept exos types pour préparer le BAC :)

Exercice 1



Type bac : Etudier une suite définie par une intégrale Episode 1

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$$

Solution vidéo ↓



1 Montrer que la suite (I_n) est minorée par 0 .

2 Etudier les variations de la suite (I_n) .

3 En déduire que la suite (I_n) est convergente.

4 Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in [0; 1]$, $0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n$.
On rappelle que $\ln 2 \leq 1$.

5 En déduire que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

6 En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 2



Type bac : Etudier une suite définie par une intégrale Episode 2

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

pour tout entier naturel n , $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

1 Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.

Solution vidéo ↓



2

2 Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.

3 En déduire la valeur exacte de u_1 .

4 Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

5 Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

6 On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Démontrer que $\ell = 0$.

Exercice 3

Type bac : Intégrales

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à

10^{-2} près de l'intégrale : $I = \int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{2-x} \right) dx$

Solution vidéo ↓



1 Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

2 Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, on a $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

3 Soient J et K les intégrales définies par $J = \int_0^1 (2+x)e^{-x} dx$ et $K = \int_0^1 x^2 f(x) dx$.

- Au moyen d'une intégration par parties, prouver que $J = 3 - \frac{4}{e}$.
- Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que $\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$.
- Démontrer que $J + K = 4I$.
- Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I , puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I .

Exercice 4

Type bac : Intégrales, Suites et exponentielle

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f_n(x) = x^2 e^{-2nx}$. On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal. On définit, pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

Solution vidéo ↓



Partie A : Étude de la fonction f_1 .

La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$. On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f_1' sa dérivée.

1 Justifier que pour tout réel x , $f_1'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.

2 Étudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

3 Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.

4 Vérifier que pour tout réel x , $f_1(x) = \left(\frac{x}{e^3} \right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

5 Justifier que la fonction F_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $F_1(x) = -e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right)$ est une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$.

6 En déduire la valeur exacte de I_1 .

Partie B : Étude de la suite (I_n) . Soit n un entier naturel non nul.

1 Interpréter graphiquement la quantité I_n .

2 Émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n) . Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.

3 En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

4 Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n) .

5 Soit n un entier naturel non nul. Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$, $0 \leq f_n(x) \leq e^{-2nx}$.

6 En déduire un encadrement de la suite (I_n) , puis sa limite.

Exercice 5



Type bac : Equation différentielle et Intégrales

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = a \ln(x).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1 Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.

2 Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a[x \ln(x) - x]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

3 En déduire l'aire du domaine bleuté en fonction de a et de x_0 .

On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point M d'abscisse x_0 .

On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

4 Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera.

Solution vidéo ↓



Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx} \sin(x) dx, \quad J_n = \int_0^\pi e^{-nx} \cos(x) dx.$$

Solution vidéo ↓



- 1 Calculer I_0 .
- 2 Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geq 0$.
- 3 Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leq 0$.
- 4 Dédire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
- 5 Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} dx$$

- 6 Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^\pi e^{-nx} dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$$

- 7 Dédire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n) .
- 8 En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

- 9 En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$.

Solution vidéo ↓



- 2** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.
- 3** En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 + \cos x + \sin x > 0$.
- 4** Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- 5** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.
- 6** En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 7** Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
- 8** Montrer que, sur l'intervalle $[0; \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α .
- 9** Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Partie B

On veut calculer l'aire, $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

- 1** Montrer que : $\mathcal{A} = 2e - 2 + \int_0^1 \cos te^{1-t} dt$.
- 2** On pose $I = \int_0^1 \cos te^{1-t} dt$ et $J = \int_0^1 \sin te^{1-t} dt$. On admet que $J = -\sin 1 + I$.
 - a.** Montrer que : $I = -\cos 1 + e - J$
 - b.** En déduire la valeur de I .
 - c.** Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-2} près par défaut.