Les primitives

Jai20enMaths

I Les primitives

1 Théorème fondamental

Définition 1.1

f est une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet une primitive sur I si, et seulement si, il existe une fonction F dérivable sur I dont la dérivée est f .
Ainsi, pour tout réel x de I, on a : $F'(x) = f(x)$

Exemple 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x$.
Soit une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $F(x) = 3x^2$. F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
En effet : $F'(x) = 6x$

Définition 1.2

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Définition 1.3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

1. Si F est une primitive de f sur I, alors les primitives de f sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto F(x) + k$ où k est une constante réelle.
2. Si $x_0 \in I$ et $y_0 \in I$, f admet une unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.

Exemple 2

Déterminer la primitive F de la fonction $f(x) = 6x$ tel que $F(1) = 8$.

Corrigé :

Les primitives de f sont alors de la forme $F(x) = 3x^2 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Or $F(1) = 8$ ainsi : $3 \times 1^2 + k = 8 \Leftrightarrow k = 8 - 3 \Leftrightarrow k = 5$
Finalement : $F(x) = 3x^2 + 5$

II Les primitives usuelles à connaître

1 Le tableau des primitives usuelles

Pour toute cette partie, on considérera a un réel non nul.

Fonction f	Une primitive de f	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax$	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax^n$ et $n \in \mathbb{N}^*$	$F(x) = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{a}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2a\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{a}{x}$	$F(x) = -a \ln x$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{a}{x^2}$	$F(x) = -\frac{a}{x}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ et $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
$f(x) = ae^x$	$F(x) = ae^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = a\cos x$	$F(x) = a\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = a\sin x$	$F(x) = -a\cos x$	$\mathbb{R}$

Exemple 3

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = -3x + 5x^2 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{\sqrt{x}} - 2$$

.

Corrigé :

On obtient alors :

$F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + 4\ln(x) - \left(-\frac{2}{x}\right) + 3 \times 2\sqrt{x} - 2x + k$ où $k \in \mathbb{R}$

$F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + 4\ln(x) + \frac{2}{x} + 6\sqrt{x} - 2x + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Exercice 1 — Calculer les primitives usuelles.

Solution vidéo ↓

On suppose que chacune des fonctions est continue sur un intervalle I que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 6$
2. $f(x) = -7$
3. $f(x) = 3x$
4. $g(x) = -6x$
5. $h(x) = x - 4$
6. $h(x) = 4x^2$
7. $p(x) = 5x^3$
8. $g(x) = 7x^4 - 3x^2 - 8x + 9$

Exercice 2 — Calculer les primitives usuelles.

Solution vidéo ↓

On suppose que chacune des fonctions est continue sur un intervalle I que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

1. Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos(x) + 4\sin x$
2. Déterminer les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}$
3. Déterminer les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 3e^x + \frac{4}{\sqrt{x}}$

2 Le tableau des primitives des fonctions composées

Dans le tableau ci-dessous, u désigne une fonction dérivable dont la dérivée est continue, sur un intervalle I :

Fonction f	Une primitive de f	Intervalle
$f(x) = \dfrac{u'}{u^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$f(x) = \dfrac{u'}{u}$	$F(x) = \ln(u)$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$
$f(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F(x) = 2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$
$f(x) = u'u^n$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	
$f(x) = u'e^u$	$F(x) = e^u$	
$f(x) = u'\cos u$	$F(x) = \sin u$	
$f(x) = u'\sin u$	$F(x) = -\cos u$	
$f(x) = \dfrac{u'}{u^n}$ avec $n \neq 1$	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	$u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$

Exemple 4 Primitive de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $\left]\dfrac{2}{5}; +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{6}{(5x-2)^2}$

Nous pouvons écrire que : $f(x) = \dfrac{6}{(5x-2)^2} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{6}{5} \times \dfrac{5}{(5x-2)^2}$

On obtient alors :

$F(x) = \dfrac{6}{5} \times \dfrac{-1}{5x-2} + k$ où $k \in \mathbb{R}$

d'où : $F(x) = \dfrac{-6}{5(5x-2)} + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Exercice 3 Calculer une primitive de la forme $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u^n(x)}$

Solution vidéo ↓

On suppose que chacune des fonctions est continue sur un intervalle I que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{4}{(4x+8)^3}$.
2. $g(x) = \dfrac{24}{(6x+1)^2}$.

Exemple 5 — Primitive de la forme $\dfrac{u'}{u}$

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $]6;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{3x-18}$

Nous pouvons écrire que : $f(x) = \dfrac{4}{3x-18} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{3}{3x-18}$

On obtient alors :

$F(x) = \dfrac{4}{3} \times \ln(|3x-18|) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Nous pouvons également écrire car $F(x) = \dfrac{4}{3} \times \ln(3x-18) + k$ où $k \in \mathbb{R}$ car $3x-18 > 0$ sur l'intervalle $]6;+\infty[$

Exercice 4 — Calculer une primitive de la forme $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Solution vidéo ↓

On suppose que chacune des fonctions est continue sur un intervalle I que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{6}{6x+2}$.
2. $f(x) = \dfrac{3x^2+2x}{x^3+x^2}$.
3. $f(x) = \dfrac{7x}{x^2+1}$.

Exemple 6 — Primitive de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $]7;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{9}{\sqrt{5x-35}}$

Nous pouvons écrire que : $f(x) = \dfrac{9}{\sqrt{5x-35}} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{9}{5} \times \dfrac{5}{\sqrt{5x-35}}$

On obtient alors :

$F(x) = \dfrac{9}{5} \times 2 \times \sqrt{5x-35} + k$ où $k \in \mathbb{R}$ d'où :

$F(x) = \dfrac{18}{5} \times \sqrt{5x-35} + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Exemple 7 — Primitive de la forme $u'u^n$

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $f(x) = 2(7x-1)^3$

Nous pouvons écrire que : $f(x) = 2(7x-1)^3 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{2}{7} \times 7 \times (7x-1)^3$

On obtient alors :

$F(x) = \dfrac{2}{7} \times \dfrac{1}{3+1} \times (7x-1)^{3+1} + k$ où $k \in \mathbb{R}$

d'où : $F(x) = \dfrac{1}{14} \times (7x-1)^4 + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Exercice 5 — Calculer une primitive de la forme $x \mapsto u'(x)u^n(x)$

Solution vidéo ↓

On suppose que chacune des fonctions est continue sur un intervalle I que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 4(4x+8)^6$.
2. $f(x) = (2x+1)\left(x^2+x\right)^3$.
3. $f(x) = 5x\left(x^2+1\right)^7$.

Exemple 8 — Primitive de la forme $u'e^u$

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $f(x) = e^{-2x+3}$
Nous pouvons écrire que : $f(x) = e^{-2x+3} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{-2} \times (-2) \times e^{-2x+3}$
On obtient alors :
$F(x) = -\dfrac{1}{2} \times e^{-2x+3} + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Exercice 6 — Calculer une primitive de la forme $x \mapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$

Solution vidéo ↓

On suppose que chacune des fonctions est continue sur un intervalle I que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 8x\mathrm{e}^{4x^2+2}$.
2. $f(x) = 12x^2\mathrm{e}^{x^3+1}$.

Exemple 9 — Primitive de la forme $u'\cos u$

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $f(x) = 4x\cos\left(2x^2+5\right)$
Soit $x \in \mathbb{R}$.
La fonction f est de la forme $u'\cos(u)$ avec $u(x) = 2x^2+5$.
De plus, $u'(x) = 4x$.
$f(x) = 4x\cos\left(2x^2+5\right)$ s'écrit alors :

$$f(x) = u'\cos(u)$$

Or une primitive de $u'\cos(u)$ est de la forme $\sin(u)$
Il en résulte donc que les primitives primitive de f sur $\mathbb{R}$ sont :
$F(x) = \sin(u) + k$ où $k \in \mathbb{R}$ Ainsi : $F(x) = \sin\left(2x^2+5\right)$ où $k \in \mathbb{R}$

Exercice 7 Calculer une primitive de la forme $x \mapsto u'(x)\cos(u(x))$

Solution vidéo ↓

On suppose que chacune des fonctions est continue sur un intervalle I que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (2x+1)\cos\left(x^2+x\right)$.
2. $g(x) = 5x\cos\left(4x^2+2\right)$.

Exemple 10 Primitive de la forme $u'\sin u$

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $f(x) = 2x\sin\left(x^2+9\right)$
Soit $x \in \mathbb{R}$.
La fonction f est de la forme $u'\sin(u)$ avec $u(x) = x^2+9$.
De plus, $u'(x) = 2x$.
$f(x) = 2x\sin\left(x^2+9\right)$ s'écrit alors
$f(x) = u'\sin(u)$ Or une primitive de $u'\sin(u)$ est de la forme $-\cos(u)$
Il en résulte donc que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont : $F(x) = -\cos(u)+k$ où $k \in \mathbb{R}$
Ainsi : $F(x) = -\cos\left(x^2+9\right)+k$ où $k \in \mathbb{R}$

Exercice 8 Calculer une primitive de la forme $x \mapsto u'(x)\sin(u(x))$

Solution vidéo ↓

On suppose que chacune des fonctions est continue sur un intervalle I que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 2x\sin\left(x^2-1\right)$.
2. $g(x) = 8x\sin\left(2x^2+6\right)$.