

Suites arithmétiques - Suites géométriques



Jai20enMaths

I Les suites arithmétiques

1 Relation de récurrence

- Définition 1.1** Une suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on a :
- $u_{n+1} = u_n + r$ où r est la **raison** de la suite arithmétique.
 - Chaque terme d'une suite arithmétique se déduit donc du précédent en lui rajoutant la raison r .

Exemple 1



Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $r = 4$. Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4 .

Corrigé :

$$u_1 = u_0 + r = 2 + 4 = 6$$

$$u_2 = u_1 + r = 6 + 4 = 10$$

$$u_3 = u_2 + r = 10 + 4 = 14$$

$$u_4 = u_3 + r = 14 + 4 = 18$$

2 Expression du terme général en fonction de n

- Définition 1.2**
- Soit (u_n) une suite arithmétique. L'expression de u_n en fonction de n est :
 - $u_n = u_0 + n \times r$: lorsque le premier terme vaut u_0 .
 - $u_n = u_1 + (n - 1) \times r$: lorsque le premier terme vaut u_1 .
 - $u_n = u_p + (n - p) \times r$: formule avec un premier terme u_p quelconque.

Soit (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $r = 3$. Déterminer u_8 .

Corrigé :

D'après la définition, nous pouvons écrire que : $u_n = u_0 + n \times r$

Ainsi :

$$u_n = 4 + 3n$$

$$u_8 = 4 + 3 \times 8 = 28$$

3 Somme de termes d'une suite arithmétique

Définition 1.3

- Soit n un entier naturel.
- La somme des termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule suivante :
- $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (\text{nombre de termes}) \times \left(\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \right)$
-

Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique .

- 1 Soit n un entier naturel. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 5$.
Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_8$.

Solution vidéo ↓



4 Démontrer qu'une suite est arithmétique

- Définition 1.4** On dit qu'une suite est arithmétique lorsque la différence
- entre deux termes consécutifs est toujours la même.
 - Autrement dit, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = r$ où r est un réel.
 -

Soit (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = 3n - 5$. La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

Corrigé :

Soit n un entier naturel. Comme $u_n = 3n - 5$ alors $u_{n+1} = 3(n+1) - 5$.

Ainsi : $u_{n+1} = 3n + 3 - 5 = 3n + 2$.

De plus :

$$u_{n+1} - u_n = 3n + 2 - (3n + 3)$$

$$u_{n+1} - u_n = 3n + 2 - 3n - 3 = -5$$

Or une suite est arithmétique lorsque la différence entre deux termes consécutifs est constante.

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = -5$.

Exercice 2



Montrer qu'une suite est arithmétique .

Soit n un entier naturel. Pour les questions suivantes préciser si la suite (u_n) est arithmétique ou non.

1 $u_n = n^2 + 3$.

2 $u_n = 2n + 5$.

3 $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$

Solution vidéo ↓



5 Sens de variation d'une suite arithmétique

Définition 1.5

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r , alors :
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante.
-

Exemple 4



Soit n un entier naturel. Déterminer le sens de variation de la suite géométrique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$

Corrigé :

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $u_0 = -2$. Dans notre situation, $r = 5 > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 3



Bilan : tout ce qu'il faut savoir sur les suites arithmétiques .

Solution vidéo ↓



1 Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$

Calculer u_1 ; u_2 et u_3 . Que remarquez-vous ?

2 Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 2 + 4n$. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 . Que remarquez-vous ?

3 La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et telle que $u_1 = 7$. Calculer u_6 .

4 La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 2$ et telle que $u_4 = 5$. Calculer u_{13} .

5 Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 2 + 1,5n$. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) ?

6 Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 10 - 2n$. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) ?

7 Soit une suite arithmétique (u_n) de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 4$. Calculer : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.



Les suites géométriques

1 Relation de récurrence

Définition 1.6

- Une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , on a :
- $u_{n+1} = u_n \times q$ où q est la **raison** de la suite géométrique.
- Chaque terme d'une suite géométrique se déduit donc du précédent en le multipliant par la raison q .
-

Exemple 5



Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $q = 2$. Déterminer u_1, u_2 .

Corrigé :

$$u_1 = u_0 \times q = 3 \times 2 = 6$$

$$u_2 = u_1 \times q = 6 \times 2 = 12$$

2 Expression du terme général en fonction de n

Définition 1.7 Soit (u_n) une suite géométrique. L'expression de u_n en fonction de n est :

- $u_n = u_0 \times q^n$: lorsque le premier terme vaut u_0
- $u_n = u_1 \times q^{n-1}$: lorsque le premier terme vaut u_1
- $u_n = u_p \times q^{n-p}$: formule avec un premier terme u_p quelconque.
-

Exemple 6



Soit (u_n) définie par $u_1 = 1024$ et $q = \frac{1}{2}$. Déterminer u_6 .

Corrigé :

D'après la définition, nous pouvons écrire que : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Ainsi :

$$u_6 = 1024 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1}$$

$$u_6 = 32$$

3 Somme de termes d'une suite géométrique

Définition 1.8 Soit n un entier naturel.

La somme des termes d'une suite géométrique est donnée par la formule suivante :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (\text{premier terme}) \times \left(\frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} \right)$$

Exercice

4



Calculer la somme des termes d'une suite géométrique .

Solution vidéo ↓

- 1** (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{32}$.
Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.



4 Démontrer qu'une suite est géométrique

Définition 1.9 On dit qu'une suite est géométrique lorsque le quotient entre deux termes consécutifs est toujours le même.

Autrement dit, pour tout entier naturel n , on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ où q est un réel.

Exercice

5



Montrer qu'une suite est géométrique.

Solution vidéo ↓

Soit n un entier naturel. Pour les questions suivantes préciser si la suite (u_n) est géométrique ou non.

1 $u_n = 4 \times 3^n$

2 $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n \end{cases}$

3 $u_n = n^2 + 1$



5 Variation d'une suite géométrique dont la raison est strictement positive

Définition 1.10 Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$.

- Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $u_0 > 0$ et $q > 1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $u_0 < 0$ et $q > 1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Soit n un entier naturel. Déterminer le sens de variation de la suite géométrique (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n \end{cases}$$

Corrigé :

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et de premier terme $u_0 = -4$. Dans notre situation, $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.

Solution vidéo ↓



- 1** Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$
 Calculer u_1 ; u_2 et u_3 . Que remarquez-vous ?
- 2** Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 2 \times 3^n$. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 . Que remarquez-vous ?
- 3** La suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et telle que $u_1 = 1024$. Calculer u_6 .
- 4** La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 2$ et telle que $u_6 = 4$. Calculer u_{11} .
- 5** La suite (u_n) est géométrique telle que $u_{10} = 2$ et $u_{12} = 32$. Calculer la raison q .
- 6** Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 3 \times 2^n$. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) ?
- 7** Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = -4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) ?
- 8** Soit une suite géométrique (u_n) de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{4}$. Calculer : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_8$.