Suites arithmétiques - Suites géométriques

Jai20enMaths

I Les suites arithmétiques

1 Relation de récurrence

Définition 1.1 Une suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, on a :
$u_{n+1} = u_n + r$ où r est la raison de la suite arithmétique.
Chaque terme d'une suite arithmétique se déduit donc du précèdent en lui rajoutant la raison r .

Exemple 1

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $r = 4$. Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4.
Corrigé :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r = 2 + 4 = 6 \\ u_2 &= u_1 + r = 6 + 4 = 10 \\ u_3 &= u_2 + r = 10 + 4 = 14 \\ u_4 &= u_3 + r = 14 + 4 = 18 \end{aligned}$$

2 Expression du terme général en fonction de n

Définition 1.2
Soit (u_n) une suite arithmétique. L'expression de u_n en fonction de n est :
$u_n = u_0 + n \times r$: lorsque le premier terme vaut u_0 .
$u_n = u_1 + (n-1) \times r$: lorsque le premier terme vaut u_1 .
$u_n = u_p + (n-p) \times r$: formule avec un premier terme u_p quelconque .

2

Exemple 2

Soit (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $r = 3$. Déterminer u_8.

Corrigé :

D'après la définition, nous pouvons écrire que : $u_n = u_0 + n \times r$

Ainsi :

$u_n = 4 + 3n$

$u_8 = 4 + 3 \times 8 = 28$

3 Somme de termes d'une suite arithmétique

Définition 1.3

Soit n un entier naturel.

La somme des termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule suivante :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (\text{nombres de termes}) \times \left(\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}\right)$$

Exercice 1

Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique .

Solution vidéo ↓

1 Soit n un entier naturel. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 5$.
Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_8$.

4 Démontrer qu'une suite est arithmétique

Définition 1.4 On dit qu'une suite est arithmétique lorsque la différence entre deux termes consécutifs est toujours la même.

Autrement dit, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = r$ où r est un réel.

Exemple 3

Soit (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 3n - 5$. La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

Corrigé :

Soit n un entier naturel. Comme $u_n = 3n - 5$ alors $u_{n+1} = 3(n+1) - 5$.

Ainsi : $u_{n+1} = 3n + 3 - 5 = 3n + 2$.

De plus :

$u_{n+1} - u_n = 3n + 2 - (3n + 3)$

$u_{n+1} - u_n = 3n + 2 - 3n - 3 = -5$

Or une suite est arithmétique lorsque la différence entre deux termes consécutifs est constante.

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = -5$.

Exercice 2 Montrer qu'une suite est arithmétique .

Solution vidéo ↓

Soit n un entier naturel. Pour les questions suivantes préciser si la suite (u_n) est arithmétique ou non.

1. $u_n = n^2 + 3$.
2. $u_n = 2n + 5$.
3. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$

5 Sens de variation d'une suite arithmétique

Définition 1.5

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors :
Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante.

Exemple 4

Soit n un entier naturel. Déterminer le sens de variation de la suite géométrique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$

Corrigé :
La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $u_0 = -2$.
Dans notre situation, $r = 5 > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 3 Bilan : tout ce qu'il faut savoir sur les suites arithmétiques .

Solution vidéo ↓

1. Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$
   Calculer $\boldsymbol{u_1}; \boldsymbol{u_2}$ et $\boldsymbol{u_3}$. Que remarquez-vous ?
2. Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $\boldsymbol{u_n} = 2 + 4\boldsymbol{n}$. Calculer $\boldsymbol{u_1}; \boldsymbol{u_2}$ et $\boldsymbol{u_3}$. Que remarquez-vous ?
3. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et telle que $u_1 = 7$. Calculer u_6.
4. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 2$ et telle que $u_4 = 5$. Calculer u_{13} .
5. Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 2 + 1,5n$. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) ?
6. Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 10 - 2n$. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) ?
7. Soit une suite arithmétique (u_n) de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 4$. Calculer : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

II Les suites géométriques

1 Relation de récurrence

Définition 1.6

Une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n, on a :
$u_{n+1} = u_n \times q$ où q est la raison de la suite géométrique.
Chaque terme d'une suite géométrique se déduit donc du précèdent en le multipliant par la raison q .

Exemple 5

Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $q = 2$. Déterminer u_1, u_2.

Corrigé :

$$u_1 = u_0 \times q = 3 \times 2 = 6$$
$$u_2 = u_1 \times q = 6 \times 2 = 12$$

2 Expression du terme général en fonction de n

Définition 1.7 Soit (u_n) une suite géométrique. L'expression de u_n en fonction de n est :
$u_n = u_0 \times q^n$: lorsque le premier terme vaut u_0
$u_n = u_1 \times q^{n-1}$: lorsque le premier terme vaut u_1
$u_n = u_p \times q^{n-p}$: formule avec un premier terme u_p quelconque .

Exemple 6

Soit (u_n) définie par $u_1 = 1024$ et $q = \frac{1}{2}$. Déterminer u_6.

Corrigé :

D'après la définition, nous pouvons écrire que : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
Ainsi :
$u_6 = 1024 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1}$
$u_6 = 32$

3 Somme de termes d'une suite géométrique

Définition 1.8 Soit n un entier naturel.
La somme des termes d'une suite géométrique est donnée par la formule suivante :
$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (\text{premier terme}) \times \left(\dfrac{1 - q^{\text{nombres de termes}}}{1-q}\right)$

Exercice 4 Calculer la somme des termes d'une suite géométrique .

Solution vidéo ↓

1 (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{32}$.
Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.

4 Démontrer qu'une suite est géométrique

Définition 1.9 On dit qu'une suite est géométrique lorsque le quotient entre deux termes consécutifs est toujours le même.
Autrement dit, pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ où q est un réel.

Exercice 5 Montrer qu'une suite est géométrique.

Solution vidéo ↓

Soit n un entier naturel. Pour les questions suivantes préciser si la suite (u_n) est géométrique ou non.

1 $u_n = 4 \times 3^n$

2 $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = 5u_n \end{cases}$

3 $u_n = n^2 + 1$

5 Variation d'une suite géométrique dont la raison est strictement positive

Définition 1.10 Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$.
Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
Si $u_0 > 0$ et $q > 1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
Si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
Si $u_0 < 0$ et $q > 1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exemple 7

Soit n un entier naturel. Déterminer le sens de variation de la suite géométrique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n \end{cases}$

Corrigé :

La suite (u_n) est une suite géoémtrique de raison $q = \dfrac{2}{5}$ et de premier terme $u_0 = -4$.
Dans notre situation, $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 6

Bilan : Tout ce qu'il faut savoir sur les suites géométriques .

Solution vidéo ↓

1 Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & 2u_n \end{cases}$
Calculer $\boldsymbol{u}_1 ; \boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{u}_3$. Que remarquez-vous ?

2 Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 2 \times 3^n$. Calculer $\boldsymbol{u}_1 ; \boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{u}_3$. Que remarquez-vous ?

3 La suite (u_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et telle que $u_1 = 1024$. Calculer u_6.

4 La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 2$ et telle que $u_6 = 4$. Calculer u_{11} .

5 La suite (u_n) est géométrique telle que $u_{10} = 2$ et $u_{12} = 32$. Calculer la raison q.

6 Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 3 \times 2^n$. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) ?

7 Soit n un entier naturel. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = -4 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) ?

8 Soit une suite géométrique (u_n) de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{4}$.
Calculer : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_8$.

Suites arithmétiques -
Suites géométriques