LES SUITES
Sujets Type bac

Jai20enMaths

I Quatre exos types pour préparer le BAC :)

Exercice 1

Type bac : Fonction ; suites ; récurrence ; théorème du point fixe.

Solution vidéo ↓

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;1]$ par

$$g(x) = 2x - x^2$$

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.
2. Calculer u_1 et u_2.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
6. On considère la suite (ν_n) définie pour tout entier naturel n par $\nu_n = \ln(1 - u_n)$. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.
7. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5 .

2

9 Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse $0,95$.

```
def seuil() :
n=0
u = 0.5
while u<0.95 :
n=...
u=...
```

Exercice 2

Type bac : Récurrence, suite arithmético-géométrique, Python et limite

Solution vidéo ↓

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10 560 panneaux solaires. On observe, chaque année, que 2% des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Modélisation à l'aide d'une suite.

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\ 560$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2020 + n$.

1 Expliquer en quoi cette modélisation à l'aide d'une suite correspond à la situation étudiée.

2 On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000 .
À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

3 Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n = 0
while .....
u = .....
n = .....
return n
```

4 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 12500$.

5 Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

6 En déduire que la suite (u_n) converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.

7 On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12500$, pour tout entier naturel n. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98 dont on précisera le premier terme.

8 Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

9 En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

10 Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Exercice 3

Type bac : Récurrence, suite arithmético-géométrique, limite

Solution vidéo ↓

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1 Calculer u_1 et u_2.

2 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

3 En déduire la limite de la suite (u_n).

4 Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

5 Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

6 En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

Exercice 4

Type bac : Récurrence, suite arithmético-géométrique, Python et limite

Solution vidéo ↓

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{4x}{1+3x}$. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1 Calculer u_1 .

2 On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

3 En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4 On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

5 Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, déterminez la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

```
def seuil(E) :
u = 0,5
n = 0
while .....
u = .....
n = n + 1
return n
```

6 Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.

7 On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$

Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

8 Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$.

9 Montrer alors que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1}{1 + 0,25^n}$.

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).

Exercice 5

Type bac : Récurrence, Python et limite

Solution vidéo ↓

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n
$u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$

1 Calculer les termes u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

2 Recopier le script python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que liste(k) prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k.

```
def liste(k) :
L = []
u = .....
for i in range(0, k + 1)
L.append(u)
u = .....
return L
```

3 On admet que, pour tout entier naturel n, la suite (u_n) est strictement positif. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

4 En déduire que la suite (u_n) converge.

5 Déterminer la valeur de sa limite.

6 Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

7 Démontrer par récurrence la conjecture précédente.