Sujets types bac : les suites

Exercice 1 — Exercice type bac : Récurrence, suite arithmético-géométrique, limite

Solution vidéo ↓

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n, u_n \geqslant n$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).
4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
5. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
6. En déduire que, pour tout entier naturel $n, u_n = 3^n + n - 1$.

Exercice 2 — Exercice type bac : Récurrence, suite arithmético-géométrique, Python et limite

Solution vidéo ↓

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$ par : $f(x) = \frac{4x}{1+3x}$. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

1. Calculer u_1 .
2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.
5. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, déterminez la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.
   def seuil(E) :
   u = 0,5
   n = 0
   while ....
   u = ...

```
n = n + 1
return n
```

6 Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.

7 On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$

Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

8 Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$.

9 Montrer alors que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1}{1 + 0,25^n}$.

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).