

Les probabilités conditionnelles



Jai20enMaths

I Les probabilités conditionnelles

1 $P_B(A)$ qui se lit la probabilité de A sachant B

Définition 1.1 On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A , la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. On note alors : $P_A(B)$

Définition 1.2 A et B sont deux événements d'un univers Ω . On sait également que $P(B) \neq 0$. On a la relation suivante :

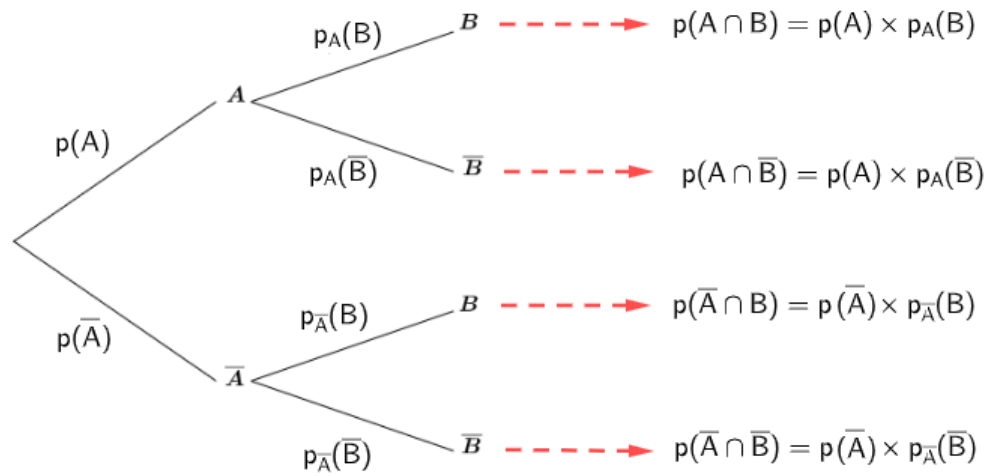
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

2 La probabilité de l'intersection $P(A \cap B)$

Définition 1.3 Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.

3 Représenter une situation par un arbre pondéré

Définition 1.4 Considérons deux événements A et B d'un univers Ω . Lorsque l'on connaît les probabilités de B ou de $\bar{B}$ sachant que A est réalisé, on peut représenter ces probabilités à l'aide d'un arbre pondéré.

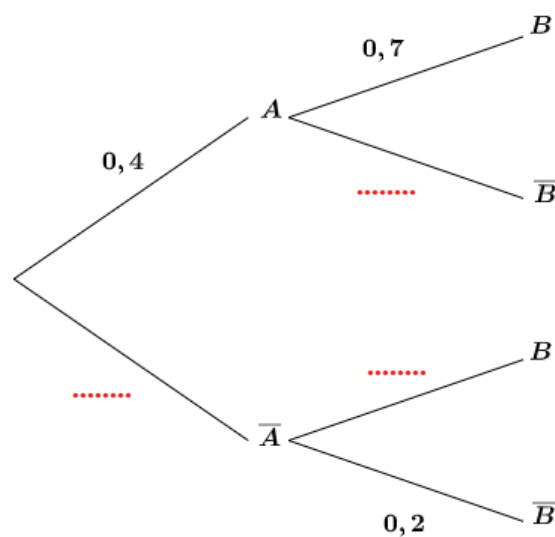


IMPORTANT : La somme des probabilités associées aux branches issues d'un nœud est égale à 1.

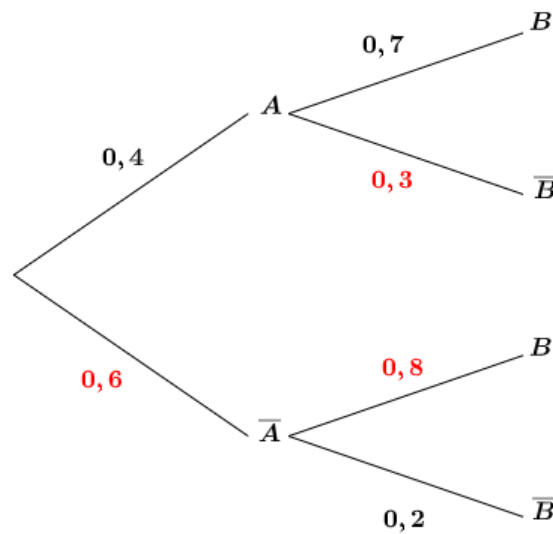
Exemple 1



Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



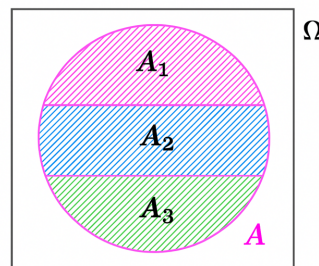
Corrigé :



II Les probabilités totales

1 Une partition de l'univers

- Définition 1.5** Nous allons donner une définition en ne prenant compte que 3 évènements et par la suite Vous pourrez généraliser cette définition à n évènements.
- On considère un événement A ainsi que les 3 évènements non vides A_1 , A_2 et A_3 tels que :
 - A_1 ; A_2 et A_3 sont incompatibles c'est à dire $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ et $A_2 \cap A_3 = \emptyset$.
 - De plus, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$. On dit que la famille des évènements A_1 ; A_2 ; $A_3 =$ forme une partition de A .



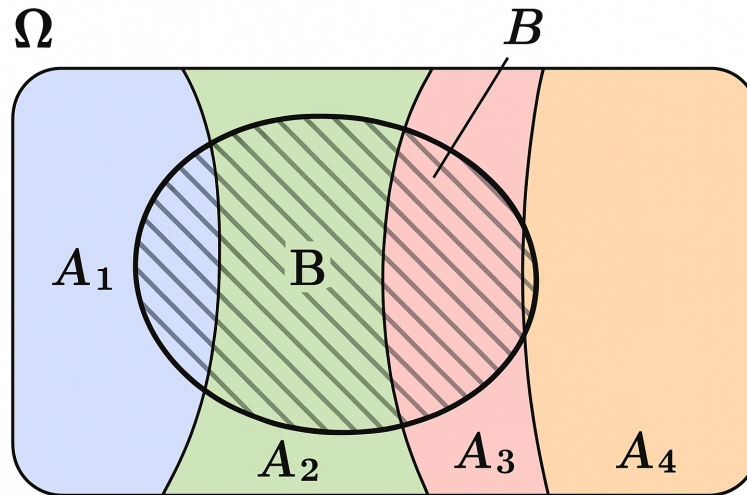
Comme dit précédemment nous pouvons reprendre ce même raisonnement pour n évènements.

2 Formule des probabilités totales

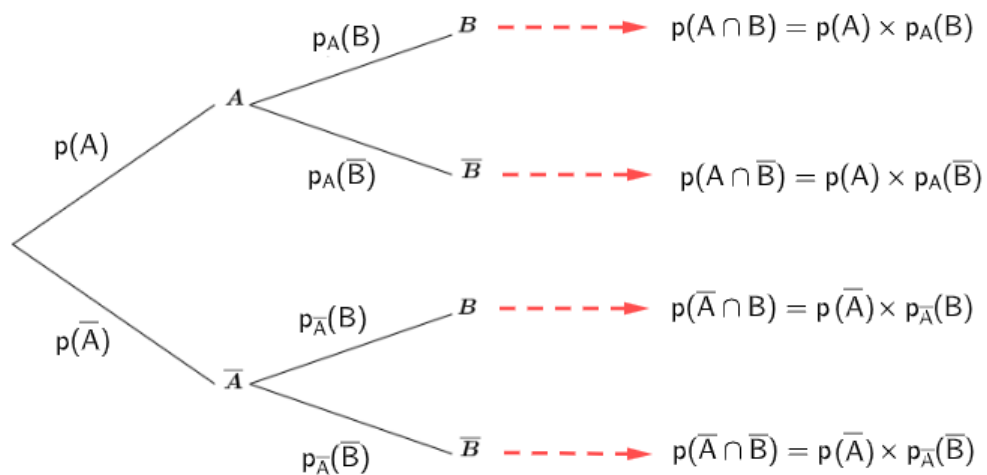
Pour cette définition, nous allons nous intéresser à 4 événements. Par la suite, ce raisonnement est transposable à n événements.

Soit A_1, A_2, A_3, A_4 une partition de l'univers Ω , alors, pour tout événement B , on a :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + p(A_3 \cap B) + p(A_4 \cap B)$$



3 Formule des probabilités totales dans un arbre pondéré

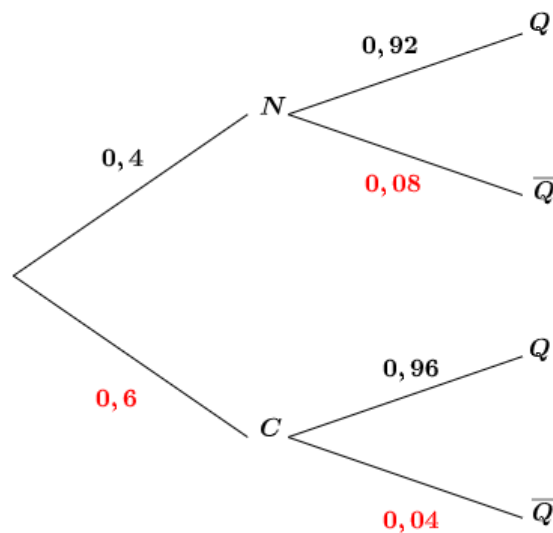


Dans une situation d'arbre pondéré, la probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement. Dans la situation ci-dessous on aura donc : $p(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

Exemple 2



Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements N et Q permettant de construire l'arbre de probabilité :



1. Calculer $P(N \cap Q)$.
2. Calculer $P(Q)$.
3. Calculer $p_Q(N)$.

Corrigé :

1.

$$\begin{aligned}
 p(N \cap Q) &= p(N) \times p_N(Q) \\
 p(N \cap Q) &= 0,4 \times 0,92 \\
 p(N \cap Q) &= 0,368.
 \end{aligned}$$

En prenant un pneu au hasard dans le stock, la probabilité de choisir un pneu neige qui a réussi les tests de qualité est de 0,368.

2. Les événements N et C forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
 p(Q) &= p(N \cap Q) + p(C \cap Q) \\
 p(Q) &= p(N \cap Q) + p(C) \times p_C(Q) \\
 p(Q) &= 0,368 + 0,6 \times 0,96 \\
 p(Q) &= 0,944.
 \end{aligned}$$

3. On cherche $p_Q(N)$.

$$\text{Or, } p_Q(N) = \frac{p(N \cap Q)}{p(Q)}$$

$$p_Q(N) = \frac{0,368}{0,944} \approx 0,390$$

Sachant que le pneu choisi a réussi les tests de qualité, la probabilité que ce pneu soit un pneu neige est environ de 0,390.



Évènements indépendants

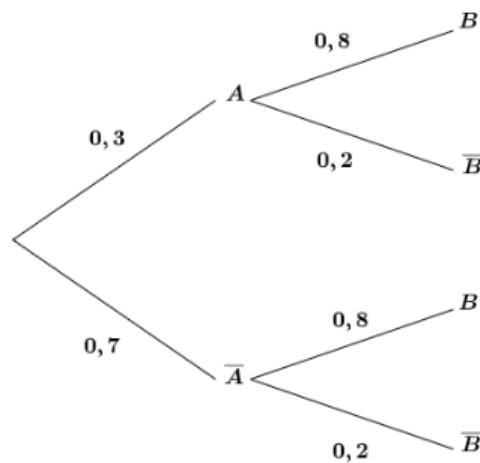
Définition 1.6 Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exemple 3



Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B permettant de construire l'arbre de probabilité :



Les événements A et B sont ils indépendants ?

Corrigé :

A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

Soit : $P(B) = 0,3 \times 0,8 + 0,7 \times 0,8 = 0,8$

De plus : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$ soit $P(A \cap B) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$

Enfin : $P(A) \times P(B) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$

Ainsi : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Les événements A et B sont bien indépendants.

Exercice

1



Vérifier si deux événements sont indépendants.

Solution vidéo ↓

- 1** A et B désignent deux événements de l'univers d'une expérience aléatoire. Nous savons que $P(A) = 0,4$; $P_A(B) = 0,7$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,8$. Est ce que les événements A et B sont indépendants ?



IV Un exercice Bilan

Exercice

2



Un exercice type devoir sur les probabilités conditionnelles.

Solution vidéo ↓

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1 , 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3 . Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

On envisage les événements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
- C : « l'arbre choisi est un conifère »,
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».



- 1 Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
- 2 Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 .
- 3 Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525 .
- 4 L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3} .
- 5 Les évènements H_1 et C sont-ils indépendants ?