Résolution d'équations

Jai20enMaths

I Les équations du premier degré

1 Définition

Définition 1.1 Une équation du premier degré à une inconnue est une équation que l'on peut écrire sous la forme $ax + b = 0$, où a et b sont des nombres réels et où a est différent de zéro.

Définition 1.2 Pour résoudre une équation, l'objectif est d'isoler l'inconnue, c'est-à-dire transformer l'équation jusqu'à obtenir une égalité de la forme :

$$x = \text{ nombre}$$

2 Comment résoudre une équation du premier degré

Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x - 4 = 7x - 9$.

Corrigé :

$3x - 4 = 7x - 9$

La première étape de regrouper les termes en x d'un coté (à gauche) et les termes sans les x d'un coté (à droite). En d'autres termes, lorsqu'on déplace un terme d'un côté de l'égalité à l'autre, il prend le signe opposé. Par exemple, si on a $7x$ à droite, en le passant à gauche il devient $-7x$. si Si -4 est à gauche , en le passant à droite il devient $+4$. On a :

$3x - 7x = -9 + 4$. On réduit maintenant.

$-4x = -5$. On divise de part et d'autre du signe égal par le réel ici -4 .

$\dfrac{-4x}{-4} = \dfrac{-5}{-4}$

$x = \dfrac{-5}{-4}$

$x = \dfrac{5}{4}$

L'équation a une solution : $\dfrac{5}{4}$. On note : $S = \left\{\dfrac{5}{4}\right\}$.

Exercice 1 Résoudre des équations : Episode 1

Solution vidéo ↓

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x - 6 = 0$
2. $4x - 7 = 7x + 1$
3. $2(x + 4) - 3 = 7x - 9$

II Les équations produit nul

Définition 1.3 Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.
Autrement dit, soient A et B deux réels. Alors :
$A \times B = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$

Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(3x - 6)(2x + 7) = 0$.

Corrigé :

$(3x - 6)(2x + 7) = 0$

Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

L'équation équivaut successivement à :

$3x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 7 = 0$

$3x = 6 \quad \text{ou} \quad 2x = -7$

$x = \dfrac{6}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\dfrac{7}{2}$

$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -\dfrac{7}{2}$

L'équation a deux solutions : 3 et $-\dfrac{7}{2}$. On note : $S = \left\{-\dfrac{7}{2}; 3\right\}$.

Exercice 2 Résoudre une équation produit nul

Solution vidéo ↓

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(2x+4)(5x+7)=0$
2. $(6x-1)(-x+3)=0$

III Équations : Factorisation, identités remarquables

Dans certaines situations, il faudra commencer par factoriser : cela permettra de résoudre l'équation plus facilement (souvent grâce à la règle du produit nul).

Exemple 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1. $(4x-3)^2-9=0$
2. $(12x+3)(2x-7)-(2x-7)^2=0$

Corrigé :

1.
$(4x-3)^2-9$. On reconnait l'identité remarquable

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$(4x-3)^2-3^2=0$
$(4x-3+3)(4x-3-3)=0$
$4x(4x-6)=0$
Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.
L'équation équivaut successivement à :
$4x=0 \quad \text{ou} \quad 4x-6=0$

$x=\dfrac{0}{4} \quad \text{ou} \quad 4x=6$

$x=0 \quad \text{ou} \quad x=\dfrac{4}{6}$.

$x=0 \quad \text{ou} \quad x=\dfrac{2}{3}$

L'équation a deux solutions : 0 et $\dfrac{2}{3}$. On note : $S=\left\{0;\dfrac{2}{3}\right\}$.

2.
$(12x+3)(2x-7)-(2x-7)^2=0$
$(12x+3)(2x-7)-(2x-7)(2x-7)=0$
$(12x+3)(2x-7)-(2x-7)(2x-7)=0$
$(2x-7)[(12x+3)-(2x-7)]=0$ $(2x-7)(10x+10)=0$ Si un produit de facteurs est

nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.
L'équation équivaut successivement à :
$2x - 7 = 0$ ou $10x + 10 = 0$

$2x = 7$ ou $10x = -10$

$x = \frac{7}{2}$ ou $x = -\frac{10}{10}$.

$x = \frac{7}{2}$ ou $x = -1$

L'équation a deux solutions : -1 et $\frac{7}{2}$. On note : $S = \left\{-1; \frac{7}{2}\right\}$.

Exercice 3 Résoudre des équations : Episode 2

Solution vidéo ↓

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $3(2x-5) = 9x - 8$
2. $(7x-3)(8x+5) = 0$
3. $(4x+6)(2x-9) - (2x-9)(7x-3) = 0$
4. $25 - (7x-6)^2 = 0$

IV Équation quotient nul

Définition 1.4 Soient deux réels A et B. Alors :

$$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \text{ et } B \neq 0$$

Autrement dit : un quotient est nul si, et seulement si, son numérateur est nul et son dénominateur est non nul.
Les valeurs qui annulent le dénominateur sont appelées valeurs interdites.

Exemple 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\frac{7x+3}{x-6} = 0$

Corrigé :
La première étape à effectuer est de rechercher la ou les valeurs interdites.
Il faut que $x - 6 \neq 0$ d'où $x \neq 6$.
6 est alors la valeur interdite.
Pour tout réel $x \neq 6$, on a :

Équation quotient nul

5

$\dfrac{7x+3}{x-6} = 0$ équivaut successivement à :

$7x+3=0$

$7x=-3$

$x=-\dfrac{3}{7}$

L'équation a une solution : $\dfrac{5}{4}$. On note : $S=\left\{\dfrac{3}{7}\right\}$.

Exercice 4 Comment résoudre une équation quotient de la forme $\dfrac{ax+b}{cx+d}=0$

Solution vidéo ↓

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{3x-21}{x-4}=0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{(3x-1)(x+5)}{2x-12}=0$

Exercice 5 Comment résoudre une équation quotient de la forme $\dfrac{ax+b}{cx+d}=k$

Solution vidéo ↓

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{5x-1}{x+2}=3$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{x+3}{2x-6}+4=0$