Logarithme népérien

I Définition

1 Définition

Définition 1.1

On appelle fonction logarithme népérien notée ln, la fonction définie sur $]0;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que : $x = e^y \Leftrightarrow y = \ln x$.

Remarque :

La fonction ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

2 Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

Définition 1.2

Soient a et b deux réels strictement positifs.

$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b)$

$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$

$\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

$\ln(a^n) = n\ln(a)$

$\dfrac{1}{2}\ln(a) = \ln(\sqrt{a})$

$e^{\ln a} = a$

$\ln(e^a) = a$

$\ln(e) = 1$

$\ln(1) = 0$

Exemple 1

Ecrire sous la forme d'un seul logarithme : $A = 2\ln(3) - \dfrac{1}{2}\ln(16)$

Corrigé :

$A = 2\ln(3) - \dfrac{1}{2}\ln(16) = \ln(3^2) - \ln\left(\sqrt{16}\right) = \ln(9) - \ln(4) = \ln\left(\dfrac{9}{4}\right)$

Exemple 2

Simplifier : $C = 3\ln(2) + 2\ln(3) - \dfrac{1}{2}\ln(9)$

Corrigé :

$C = 3\ln(2) + 2\ln(3) - \dfrac{1}{2}\ln(9)$ équivaut successivement à :

$C = \ln(2^3) + \ln(3^2) - \ln\left(\sqrt{9}\right)$
$C = \ln(8) + \ln(9) - \ln(3)$
$C = \ln(8 \times 9) - \ln(3)$
$C = \ln(72) - \ln(3)$
$C = \ln\left(\dfrac{72}{3}\right)$
$C = \ln(24)$

Exercice 1 Les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien.

Solution vidéo ↓

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \ln(2) + \ln(5)$.
2. $B = \ln(3) - \ln(7)$.
3. $C = 2\ln(3) + \dfrac{1}{2}\ln(5)$.
4. Ecrire en fonction de $\ln(2)$ le nombre suivant :

$$D = 2\ln(8) - 6\ln(\sqrt{2}) - \ln(16)$$

3 Domaine de définition

Définition 1.3

Soit u une fonction définie sur un intervalle I . Alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est définie si et seulement si u est strictement positive sur I .

Exercice 2 — Déterminer le domaine de définition avec le logarithme népérien.

Solution vidéo ↓

Simplifier les expressions suivantes :

1. Soit $f(x) = 2\ln(-4x+12)$.
   Déterminer le domaine de définition de f.
2. Soit $g(x) = \ln(3x+6) + \ln(-5x+20)$.
   Déterminer le domaine de définition de g.

II Équations et inéquations

1 Équations de la forme $\ln x = a$

Définition 1.4

Soient A et B deux réels strictement positifs.
$\ln(A) = \ln(B) \Leftrightarrow A = B$
$\ln\left(e^A\right) = A$

Exemple 3

Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation $-11\ln(x) + 3 = -4\ln(x) - 11$.

Corrigé :

L'équation est définie si et seulement si $x > 0$.
$-11\ln(x) + 3 = -4\ln(x) - 11$ équivaut successivement à :
$-11\ln(x) + 4\ln(x) = -11 - 3$
$-7\ln(x) = -14$
$\ln(x) = \dfrac{-14}{-7}$
$\ln(x) = 2$
$\ln x = \ln\left(e^2\right)$ car $\ln(e^a) = a$
$x = e^2$
Or $e^2 \in]0;+\infty[$, donc la solution de l'équation est : $S = \{e^2\}$

Exercice 3

Résoudre une équation avec la fonction logarithme népérien.

Solution vidéo ↓

Simplifier les expressions suivantes :

1. Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation $\ln x = 7$.
2. Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation $2\ln x - 6 = 0$.
3. Résoudre dans $]-\infty;+\infty[$ l'équation $e^{x+1} = 4$.
4. Résoudre dans $]-\infty;+\infty[$ l'équation $e^{x+1} = -7$.

2 Équations de la forme $\ln(A) = \ln(B)$

Définition 1.5

Soient A et B deux réels strictements positifs.
$\ln(A) = \ln(B) \Leftrightarrow A = B$

Exemple 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(2x+14) = \ln(x-6)$.

Corrigé :

L'équation est définie si et seulement si $\left\{\begin{array}{c} 2x+14>0 \\ \text{et} \\ x-6>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x>-7 \\ \text{et} \\ x>6 \end{array}\right.$

On fait l'intersection des deux intervalles, ainsi le domaine de définition est :

$$D_f =]6;+\infty[$$

$\ln(2x+14) = \ln(x-6)$ équivaut successivement à
$2x+14 = x-6$
$2x - x = -6 - 14$
$x = -20$
Or $-20 \notin]6;+\infty[$, donc il n'y a pas de solution à l'équation.
On écrit alors : $S = \emptyset$

Exercice 4

Résoudre une équation avec la fonction logarithme népérien.

Solution vidéo ↓

Simplifier les expressions suivantes :

1. Résoudre l'équation $\ln(2x+6) = 0$.
2. Résoudre l'équation $\ln(2x-2) = \ln(x+2)$.
3. Résoudre l'équation $\ln(x-3) + \ln(2x+1) = 2\ln(2)$.

Exercice 5

Résoudre une équation avec la fonction logarithme népérien partie 3.

Solution vidéo ↓

Simplifier les expressions suivantes :

1 Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation $(\ln(x))^2 - 5\ln(x) + 4 = 0$.

III Inéquations

Exemple 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln x + \ln 3 \leqslant \ln(2x+1)$

Corrigé :

La première étape ici est de déterminer le domaine de validité de cette inéquation.

L'équation est définie si et seulement si $\begin{cases} x > 0 \\ \text{et} \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{et} \\ x > \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

On fait l'intersection des deux intervalles, ainsi le domaine de définition est :

$$D_f =]0;+\infty[$$

Résolvons maintenant l'inéquation :

$\ln x + \ln 3 \leqslant \ln(2x+1)$

$\ln(3x) \leqslant \ln(2x+1)$

$3x \leqslant 2x+1$

$x \leqslant 1$

Il nous faut déterminer les réels $x \leqslant 1$ appartenant à l'intervalle du domaine de définition $D_f =]0;+\infty[$.

Les solutions de l'inéquations sont donc les réels appartenant à l'intervalle $]0;1]$

Exercice 6 — Résoudre une inéquation avec la fonction logarithme népérien.

Solution vidéo ↓

Simplifier les expressions suivantes :

1. Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'inéquation $\ln x \geqslant 4$.
2. Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'inéquation $\ln x \leqslant -2$.
3. Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'inéquation $2\ln x + 10 > 0$.

Exercice 7 — Résoudre une inéquation avec la fonction logarithme népérien .

Solution vidéo ↓

Simplifier les expressions suivantes :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(x+2) + \ln(x) \geqslant \ln(3)$.

Exercice 8 — Résoudre les inéquations avec un exposant d'inconnue n.

Solution vidéo ↓

1. Soit n un entier naturel, résoudre l'inéquation $2^n \geq 3040$.
2. Soit n un entier naturel, résoudre l'inéquation $400 \times 0,9^n + 600 \leq 700$.

IV Etude de la fonction logarithme népérien

1 Dérivée de la fonction logarithme népérien

Définition 1.6

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a : $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Définition 1.7

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Exemple 6

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 3\ln(x) + 7x + 6$.
Déterminer l'expression de la dérivée f' de f.

Corrigé :

La fonction f est définie si et seulement si $x > 0$. De plus f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{3}{x} + 7$

On va mettre tout au même dénominateur pour nous préparer aux études de signe.

Ainsi : $f'(x) = \dfrac{3+7x}{x}$

2 Dérivée de la fonction $\ln(u)$

Définition 1.8

Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $\ln(u)$ est alors dérivable sur I et on a : $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.

Exemple 7

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2\ln(4x+6)$.
Déterminer l'expression de la dérivée f' de f.

Corrigé :

La fonction f est définie si et seulement si $4x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{3}{2}$.

Ainsi le domaine de définition est $Df = \left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.

De plus le domaine de dérivabilité est le même intervalle que celui du domaine de définition.

Ainsi f est dérivable sur $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

On a : $u(x) = 4x + 6$ et $u'(x) = 4$

Ainsi : $f'(x) = 2 \times \dfrac{4}{4x+6}$

D'où : $f'(x) = \dfrac{8}{4x+6}$

Exercice 9 — Tout savoir sur les dérivées de la fonction logarithme népérien.

Solution vidéo ↓

1. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2\ln x - 4x + 3$.
2. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 3x\ln x$.
3. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\left]\dfrac{7}{3};+\infty\right[$ par : $f(x) = \ln(3x-7) - 5x$.
4. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $]-\infty;+\infty[$ par : $f(x) = 4\ln\left(x^2 - 3x + 5\right)$.

Exercice 10 — Étudier les variations de la fonction logarithme népérien.

Solution vidéo ↓

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 3\ln x$.

Exercice 11 — Étudier les variations de la fonction logarithme népérien.

Solution vidéo ↓

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 5x\ln x$.

V Les limites usuelles

1 Limite en 0 et en l'infini

Définition 1.9

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Exemple 8

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln(x) + 5x + 6$.

Corrigé :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln(x) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 5x+6 & = & +\infty \end{array}\right\} \text{par addition } \lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln(x) + 5x + 6 = +\infty$$

Exemple 9

Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} -5\ln(x) - 6x - 2$.

Corrigé :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to 0^+} -5\ln(x) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} -6x-2 & = & -2 \end{array}\right\} \text{par somme } \lim\limits_{x \to 0^+} -5\ln(x) - 6x - 2 = +\infty$$

2 Les croissances comparées

Définition 1.10

Soit n un entier naturel non nul

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\ln x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$

Définition 1.11 Il est important de retenir que, en l'infini, les fonctions exponentielles croissent plus vite que toutes les puissances de x, et qu'une puissance positive de x croît plus vite que toutes les puissances d'un logarithme.

Logarithme népérien

Exemple 10

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3\ln(x) - 5x^4 + 6x - 1$

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to +\infty} -5x^4 - 1 & = & -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 3\ln(x) + 6x & = & +\infty \end{array}\right\}$$

Nous rencontrons une forme indéterminée.

Pour lever cette indétermination, nous allons factoriser par le plus fort c'est à dire ici x^4.

Ainsi :

$$\lim\limits_{x \to +\infty} 3\ln(x) - 5x^4 + 6x - 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 \left(\frac{3\ln(x) - 5x^4 + 6x - 1}{x^4}\right)$$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} 3\ln(x) - 5x^4 + 6x - 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 \left(\frac{3\ln(x)}{x^4} - \frac{5x^4}{x^4} + \frac{6x}{x^4} - \frac{1}{x^4}\right)$$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} 3\ln(x) - 5x^4 + 6x - 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 \left(\frac{3\ln(x)}{x^4} - 5 + \frac{6}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^4} = 0$ (croissances comparées). D'où :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3\ln(x)}{x^4} - 5 + \frac{6}{x^3} - \frac{1}{x^4} & = & -5 \end{array}\right\} \text{par produit :}$$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 \left(\frac{3\ln(x)}{x^4} - 5 + \frac{6}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right) = -\infty$$

Finalement : $\lim\limits_{x \to +\infty} 3\ln(x) - 5x^4 + 6x - 1 = -\infty$

Exemple 11

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} (6x^3 - 4x^2 + 7x)\ln(x)$

Corrigé :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to 0^+} 6x^3 - 4x^2 + 7x & = & 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) & = & -\infty \end{array}\right\}$$

Nous rencontrons une forme indéterminée.

Pour lever cette indétermination, il va falloir ici développer l'expression. Ce qui nous donne :

$$\lim\limits_{x \to 0^+} (6x^3 - 4x^2 + 7x)\ln(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (6x^3\ln(x) - 4x^2\ln(x) + 7x\ln(x))$$

D'après le rappel, il en résulte donc que :

$\lim\limits_{x \to 0^+} 6x^3\ln(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} -4x^2\ln(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} 7x\ln(x) = 0$

Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^+} (6x^3\ln(x) - 4x^2\ln(x) + 7x\ln(x)) = 0$

Finalement : $\lim\limits_{x \to 0^+} (6x^3 - 4x^2 + 7x)\ln(x) = 0$

Exercice 12

Tout savoir sur les limites avec la fonction logarithme népérien

Solution vidéo ↓

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln x + 4x - 5$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} -3\ln x + x^2 + 3x - 5$.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x + 4}{\ln x - 5}$.
4. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 3x)\ln x$.

VI Un sujet type BAC

Exercice 13

Sujet type Bac - Fonction logarithme népérien et continuité

Solution vidéo ↓

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2 + \ln(x)$.

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?
2. Etudier les variations de g sur $]0;+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0;+\infty[$. On note α cette solution. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
4. Déterminer le signe de g suivant les valeurs de x.

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln(x))^2$. On note f' la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$.

5. Exprimer, pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
6. Etudier les variations de g sur $]0;+\infty[$.