Les équations différentielles

Jai20enMaths

I Équations différentielles

1 Définition d'une équation différentielle

Définition 1.1

Une équation différentielle est une équation où l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction.

Exemple 1

1. $4y' + 6y = 0$ est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.
2. $2y' + 7y = 6$ est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.
3. $y' - 5y = 2xe^x + x$ est une équation différentielle du premier ordre avec un second membre non constant.

2 Equation différentielle $y' = ay$

Définition 1.2

Soit a un réel non nul.
Soit l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un réel avec $a \neq 0$, et où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme :
$f(x) = ke^{ax}$ où k est une constante réelle.

Exemple 2

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' = 9y$

Corrigé :

On identifie ici que : $a = 9$.

Il en résulte que les solutions de l'équation sont alors : $f(x) = ke^{9x}$ où k est une constante réelle.

Finalement : $f(x) = ke^{9x}$ où k est une constante réelle.

Exercice 1 — Équation différentielle de la forme $y' = ay$.

Solution vidéo ↓

1. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 6y$. Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation (E) .
2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -4y$. Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation (E) .
3. On considère l'équation différentielle (E) : $2y' + 6y = 0$. Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation (E) .

3 Equation différentielle $y' = ay$ avec condition initiale

Définition 1.3

Soit a un réel non nul.

Soit l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un réel avec $a \neq 0$, et où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme : $f(x) = ke^{ax}$ où k est une constante réelle.

Quels que soient les réels x_0 et y_0, l'équation $y' = ay$ admet une unique solution f prenant en x_0 la valeur y_0 telle que $f(x_0) = y_0$.

Exemple 3

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' = 9y$ tel que $f(0) = 7$.

Corrigé :

On identifie ici que : $a = 9$.

Il en résulte que les solutions de l'équation sont alors : $f(x) = ke^{9x}$ où k est une constante réelle.

Or : $f(0) = 7$ ce qui nous permet d'écrire que :

$ke^{9\times 0} = 7$ équivaut successivement à :

$ke^0 = 7$. Nous savons que $e^0 = 1$.

$k = 7$

Il en résulte que la solution de l'équation différentielle $y' = 9y$ tel que $f(0) = 7$ est alors : $f(x) = 7e^{9x}$

Exercice 2 — Équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec une condition.

Solution vidéo ↓

1. On considère l'équation différentielle $(E) : 3y' - 5y = 0$. Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation (E) .
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 6$.

4 Equation différentielle $y' = ay + b$

Définition 1.4

Soit l'équation différentielle $y' = ay + b$ où a et b sont deux réels, avec $a \neq 0$, et où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme : $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est une constante réelle.

La fonction $f_0(x) = -\frac{b}{a}$ est appelée solution particulière constante de l'équation différentielle.

Exemple 4

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' = 3y - 2$

Corrigé :

On identifie ici que : $a = 3$ et $b = -2$.

Il en résulte que les solutions de l'équation sont alors : $f(x) = ke^{3x} - \frac{(-2)}{3}$ où k est une constante réelle.

Finalement : $f(x) = ke^{3x} + \frac{2}{3}$ où k est une constante réelle.

Exercice 3 — Équation différentielle de la forme $y' = ay + b$.

Solution vidéo ↓

1. On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y + 6$. Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation (E) .
2. On considère l'équation différentielle $(E) : y' = -4y + 3$. Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation (E) .
3. On considère l'équation différentielle $(E) : 2y' - 10y + 8 = 0$. Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation (E) .

5 Equation différentielle $y' = ay + b$ avec condition initiale

Définition 1.5

Soit l'équation différentielle $y' = ay + b$ où a et b sont deux réels, avec $a \neq 0$, et où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme : $f(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où k est une constante réelle.

Quels que soient les réels x_0 et y_0, l'équation $y' = ay + b$ admet une unique solution f prenant en x_0 la valeur y_0 telle que $f(x_0) = y_0$.

Exemple 5

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' = 2y + 4$ tel que $f(0) = 10$.

Corrigé :

On identifie ici que : $a = 2$ et $b = 4$.

Il en résulte que les solutions de l'équation sont alors : $f(x) = ke^{2x} - \dfrac{4}{2}$ où k est une constante réelle.

Finalement : $f(x) = ke^{2x} - 2$ où k est une constante réelle.

Or on sait que $f(0) = 10$, il vient alors que :

$f(0) = 10$ équivaut successivement à :

$ke^{2\times 0} - 2 = 10$

$ke^{0} - 2 = 10$ or $e^{0} = 1$

$k - 2 = 10$

$k = 10 + 2$

D'où : $k = 12$

Il en résulte que la solution de l'équation différentielle $y' = 2y + 4$ tel que $f(0) = 10$ est alors : $f(x) = 12e^{2x} - 2$

Exercice 4 Équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec une condition.

Solution vidéo ↓

1. On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 4y + 8$.
   Déterminer la forme générale
   des fonctions solutions de l'équation (E) .
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(1) = 7$

II Exercices types BAC

Exercice 5 — SUJET TYPE BAC . Equation différentielle et Intégrales.

Solution vidéo ↓

On considère l'équation différentielle (E_0) : $y' = y$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.
On considère l'équation différentielle
(E) : $y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0 .
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0) .
3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$. On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est solution de (E) est équivalent à $f - h$ est solution de (E_0).
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right] dx$.

Exercice 6 — SUJET TYPE BAC . Equation différentielle et Intégrales.

Solution vidéo ↓

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
(E) : $y' - 2y = 2\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)$.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^{2x} + 1$.

1. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = 2x\mathrm{e}^{2x} + 1$ est solution de l'équation différentielle (E).
2. On pose : $y = z + h$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : $z' - 2z = 0$. Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E).
3. Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0 .
4. Déterminer le sens de variation de g. Présenter son tableau de variations. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 - g(x) \geqslant 0$.
6. Calculer l'intégrale : $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)]\mathrm{d}x$.