Dérivation et convexité

Jai20enMaths

I Rappels sur la dérivation (première spécialité)

1 Récapitulatif des dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Domaine de définition	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

2 Dérivée de la somme

Définition 1.1

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $u+v$ est définie et dérivable sur I et $(u+v)' = u'+v'$.

3 Dérivée du produit par un scalaire

Définition 1.2

Soient u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et k un réel.
Alors la fonction $k \times u$ est définie et dérivable sur I et $(k \times u)' = k \times u'$.

4 Dérivée du produit

Définition 1.3

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $u \times v$ est définie et dérivable sur I et $(u \times v)' = u'v + uv'$

5 Dérivée du quotient

Définition 1.4

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $\dfrac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

6 Dérivée de l'inverse

Définition 1.5

Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction $\dfrac{1}{v}$ est définie et dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$

II Dérivées et fonctions composées

1 Fonction composée

Définition 1.6

On appelle fonction composée des fonctions u par v la fonction notée $v \circ u$ définie par :

$$v \circ u(x) = v(u(x)).$$

Exemple 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x+3}$.
Décomposer f sous la forme $v \circ u$ en précisant les fonctions u et v.
Corrigé :

$$x \xmapsto{u} \underbrace{2x+3}_{X} \xmapsto{v} e^{X} = e^{2x+3}$$

Nous avons donc $f(x) = (v \circ u)(x)$ où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x + 3$ et v est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = e^{x}$.
Il en résulte donc que f est aussi définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1 Schéma de composition.

Solution vidéo ↓

1 Soit f la fonction definie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{3x^2 + 6}$.
Décomposer f sous la forme $(v \circ u)(x)$ en précisant u et v .

Exercice 2 Fonctions composées : Savoir calculer $(u \circ v)(x)$

Solution vidéo ↓

Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que
$u(x) = 2x + 6$ et $v(x) = x^2 + 5x$.

1 Déterminer $(u \circ v)(x)$.

2 Déterminer $(v \circ u)(x)$.

2 Formule dérivée d'une fonction composée

Définition 1.7

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et v une fonction dérivable sur un intervalle J tel que, pour tout réel x de I, u(x) appartient à J , alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout x appartenant à I : $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$.

3 Dérivée de la puissance

Définition 1.8

Soit n un entier non nul.
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction u^n est définie et dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

Exemple 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)^5$.
Calculer la dérivée f' de f.
Corrigé :
f est dérivable sur $\mathbb{R}$
On reconnaît ici u^n où $u(x) = 2x - 1$ et $n = 5$. Ainsi $u'(x) = 2$. Il en résulte que :

$$f'(x) = 5 \times 2 \times (2x-1)^{5-1}$$
$$f'(x) = 5 \times 2 \times (2x-1)^4$$

Finalement : $\quad f'(x) = 10(2x-1)^4$

Exercice 3

Solution vidéo ↓

On considère que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Calculer la dérivée des fonctions dans chacun des cas.

1. $f(x) = (3x+4)^6$.
2. $g(x) = 4\left(5x^2+2x\right)^3$.

4 Dérivée de la racine

Définition 1.9

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction $\sqrt{u}$ est définie et dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exemple 3

On considère la fonction f définie sur $\left[\dfrac{5}{4}; +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{4x-5}$.
Calculer la dérivée f' de f.
Corrigé :
On rappelle dans cette situation que f est dérivable si et seulement si $4x - 5 > 0$
Or : $4x - 5 > 0 \Leftrightarrow 4x > 5 \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{4}$
f est dérivable sur $\left]\dfrac{5}{4}; +\infty\right[$

On reconnaît ici $\sqrt{u}$ où $u(x) = 4x - 5$. Ainsi $u'(x) = 4$.

Ainsi : $f'(x) = \dfrac{4}{2\sqrt{4x-5}}$

Il en résulte que : $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x-5}}$

Exercice 4

Solution vidéo ↓

On considère que les fonctions f ; g et h sont dérivables sur un intervalle I que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Calculer la dérivée des fonctions dans chacun des cas.

1. $f(x) = \sqrt{5x+4}$.
2. $g(x) = 7\sqrt{3x-1}$.
3. $h(x) = 3\sqrt{x^2+5x+1}$.

5 Dérivée de l'exponentielle

Définition 1.10

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction e^u est définie et dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$

Exemple 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{6x-4}$.
Calculer la dérivée f' de f.

Corrigé :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ici $u(x) = 6x - 4$ et donc $u'(x) = 6$.

D'où $f'(x) = 2 \times 6 \times e^{6x-4} \Leftrightarrow \quad f'(x) = 12e^{6x-4}$

Exercice 5

Solution vidéo ↓

On considère que les fonctions f ; g et p sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Calculer la dérivée des fonctions dans chacun des cas.

1. $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x+6}$.
2. $g(x) = 5\mathrm{e}^{x^2-4}$.
3. $p(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

6 Dérivée du cosinus

Définition 1.11

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction $\cos(u)$ est définie et dérivable sur I et $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$

Exemple 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(4x - 5)$.
Calculer la dérivée f' de f.
Corrigé :
f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On reconnaît ici $\cos(u)$ où $u(x) = 4x - 5$. Ainsi $u'(x) = 4$.
Il en résulte que : $f'(x) = -4\sin(4x - 5)$

Exercice 6

Solution vidéo ↓

On considère que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Calculer la dérivée des fonctions dans chacun des cas.

1. $f(x) = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.
2. $g(x) = 4\cos\left(9x + \frac{\pi}{3}\right)$.

7 Dérivée du sinus

Définition 1.12

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction $\sin(u)$ est définie et dérivable sur I et $(\sin(u))' = u' \cos(u)$

Exemple 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(9x + 1)$.
Calculer la dérivée f' de f.
Corrigé :
f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On reconnaît ici $\sin(u)$ où $u(x) = 9x + 1$. Ainsi $u'(x) = 9$.
Il en résulte que : $f'(x) = 9\cos(9x + 1)$

Exercice 7

Solution vidéo ↓

On considère que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Calculer la dérivée des fonctions dans chacun des cas.

1. $f(x) = \sin\left(-4x + \frac{\pi}{6}\right)$.
2. $g(x) = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

III Convexité

1 Fonction convexe

Définition 1.13

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est une fonction **convexe** sur un intervalle I si sa courbe représentative C_f est située entièrement **au-dessus de chacune de ses tangentes .**
f est une fonction **convexe** sur un intervalle I si chacune de ses tangentes sont **en dessous** de la courbe représentative C_f .

2 Fonction concave

Définition 1.14

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est une fonction **concave** sur un intervalle I si sa courbe représentative C_f est située entièrement **en-dessous de chacune de ses tangentes .**
f est une fonction **concave** sur un intervalle I si chacune de ses tangentes sont **au-dessus** de la courbe représentative C_f .Nous avons tracé ci-dessous 3 tangentes à la courbe C_f.

3 Relation avec la dérivée seconde et la convexité

Définition 1.15

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0$ sur I.
f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leq 0$ sur I.

Exercice 8 Lien convexité d'une fonction f et signe de la dérivée seconde de f .

Solution vidéo ↓

1 On considère la forction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 6$$

Etudier la convexité de f.

4 Relation avec la dérivée et la convexité

Définition 1.16

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f est convexe sur I alors f' est croissante sur I.
Si f est concave sur I alors f' est décroissante sur I.

5 Point d'inflexion

Définition 1.17

Un point d'inflexion est un point où la courbe représentative traverse sa tangente.
Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Définition 1.18

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
f possède un point d'inflexion lorsque sa dérivée seconde s'annule et change de signe en ce point.