# Dérivation et convexité



Jai20enMaths



# Rappels sur la dérivation (première spécia-

# 1 Récapitulatif des dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Domaine de définition	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$f\left( x\right) =a$	$\mathbb{R}$	$f'\left(x\right) = 0$	$\mathbb{R}$
$f\left(x\right) = ax + b$	$\mathbb{R}$	f'(x) = a	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'\left(x\right) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f\left(x\right) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f\left(x\right) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f\left(x\right) = e^{x}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f\left(x\right) = \cos\left(x\right)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f\left(x\right) = \sin\left(x\right)$	$\mathbb{R}$	$f'\left(x\right) = \cos\left(x\right)$	$\mathbb{R}$
$f\left(x\right) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$



# 2 Dérivée de la somme

## Définition 1.1

- Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
- Alors la fonction u + v est définie et dérivable sur I et (u + v)' = u' + v'.

•

# 3 Dérivée du produit par un scalaire

## Définition 1.2

Soient u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et k un réel. Alors la fonction  $k \times u$  est définie et dérivable sur I et  $(k \times u)' = k \times u'$ .

•

- 4 Dérivée du produit
  - Définition 1.3

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Alors la fonction  $u \times v$  est définie et dérivable sur I et  $(u \times v)' = u'v + uv'$ 

•

# 5 Dérivée du quotient

## Définition 1.4

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Alors la fonction  $\frac{u}{v}$  est définie et dérivable sur I et  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ 

.

# 6 Dérivée de l'inverse

## Définition 1.5

Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Alors la fonction  $\frac{1}{v}$  est définie et dérivable sur I et  $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$ 

ė



# Fonction composée

## Définition 1.6

On appelle fonction composée des fonctions u par v la fonction notée  $v \circ u$  définie par:

$$v \circ u(x) = v(u(x)).$$

# Exemple



Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{2x+3}$ .

Décomposer f sous la forme  $v \circ u$  en précisant les fonctions u et v.

#### Corrigé:

$$x \stackrel{u}{\longmapsto} \underbrace{2x+3}_{X} \stackrel{v}{\longmapsto} e^{X} = e^{2x+3}$$

Nous avons donc  $f(x) = (v \circ u)(x)$  où u est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par u(x) = 2x + 3et v est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $v(x) = e^x$ . Il en résulte donc que f est aussi définie sur  $\mathbb{R}$ .





Schéma de composition.

#### Solution vidéo ↓

**1** Soit f la fonction definie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt{3x^2 + 6}$ . Décomposer f sous la forme  $(v \circ u)(x)$  en précisant u et v.



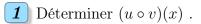
# Exercice

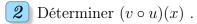


Fonctions composées : Savoir calculer  $(u \circ v)(x)$ 

#### Solution vidéo ↓

Soient u et v deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  telles que u(x) = 2x + 6 et  $v(x) = x^2 + 5x$ .







# Formule dérivée d'une fonction composée

# **D**éfinition 1.7

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et v une fonction dérivable sur un intervalle J tel que, pour tout réel x de I, u(x) appartient à J, alors la fonction  $v \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout x appartenant à I :  $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$ .



# 3 Dérivée de la puissance

#### Définition 1.8

• Soit n un entier non nul.

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Alors la fonction  $u^n$  est définie et dérivable sur I et  $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ 

Exemple 2



On considère la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (2x - 1)^5$ . Calculer la dérivée f' de f.

#### Corrigé:

f est dérivable sur  $\mathbb{R}$ 

On reconnaît ici  $u^n$  où u(x) = 2x - 1 et n = 5. Ainsi u'(x) = 2. II en résulte que :

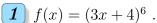
$$f'(x) = 5 \times 2 \times (2x - 1)^{5-1}$$
  
$$f'(x) = 5 \times 2 \times (2x - 1)^4$$

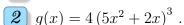
Finalement:  $f'(x) = 10(2x - 1)^4$ 





On considère que les fonctions f et g sont dérivables sur  $\mathbb R$  . Calculer la dérivée des fonctions dans chacun des cas.





#### Solution vidéo ↓

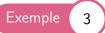


# 4 Dérivée de la racine

## Définition 1.9

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Alors la fonction  $\sqrt{u}$  est définie et dérivable sur I et  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ 





On considère la fonction f définie sur  $\left[\frac{5}{4}; +\infty\right[$  par  $f(x) = \sqrt{4x-5}$ .

Calculer la dérivée f' de f.

#### Corrigé:

On rappelle dans cette situation que f est dérivable si et seulement si 4x-5>0

Or : 
$$4x - 5 > 0 \Leftrightarrow 4x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{4}$$

f est dérivable sur  $\left]\frac{5}{4}; +\infty\right[$ 



On reconnaît ici  $\sqrt{u}$  où u(x) = 4x - 5. Ainsi u'(x) = 4.

 $f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x - 5}}$ Ainsi:

Il en résulte que :  $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-5}}$ 

Exercice



Solution vidéo ↓



On considère que les fonctions f; g et h sont dérivables sur un intervalle I que l'on ne cherchera pas à déterminer. Calculer la dérivée des fonctions dans chacun des cas.

- 1  $f(x) = \sqrt{5x+4}$ .
- $q(x) = 7\sqrt{3x-1}$ .
- 3  $h(x) = 3\sqrt{x^2 + 5x + 1}$ .

# Dérivée de l'exponentielle

## Définition 1.10

- Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
- Alors la fonction  $e^u$  est définie et dérivable sur I et  $(e^u)' = u'e^u$

Exemple



On considère la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2e^{6x-4}$ . Calculer la dérivée f' de f.

## Corrigé:

f est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

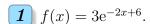
Ici u(x) = 6x - 4 et donc u'(x) = 6.

D'où  $f'(x) = 2 \times 6 \times e^{6x-4} \Leftrightarrow f'(x) = 12e^{6x-4}$ 

Exercice



On considère que les fonctions f; g et p sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ . Calculer la dérivée des fonctions dans chacun des cas.



**2** 
$$g(x) = 5e^{x^2 - 4}$$
.

$$9 p(x) = xe^{-x}$$
.

## Solution vidéo ↓



Dérivation et convexité



# 6 Dérivée du cosinus

#### Définition 1.11

· Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Alors la fonction  $\cos(u)$  est définie et dérivable sur I et  $(\cos(u))' = -u'\sin(u)$ 

Exemple 5



On considère la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos(4x - 5)$ . Calculer la dérivée f' de f.

#### Corrigé:

f est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On reconnaît ici  $\cos(u)$  où u(x) = 4x - 5. Ainsi u'(x) = 4.

II en résulte que :  $f'(x) = -4\sin(4x - 5)$ 

Exercice



On considère que les fonctions f et g sont dérivables sur  $\mathbb R$  . Calculer la dérivée des fonctions dans chacun des cas.

$$1 f(x) = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$2 g(x) = 4\cos\left(9x + \frac{\pi}{3}\right).$$

#### Solution vidéo ↓



#### **7** Dérivée du sinus

## Définition 1.12

· Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Alors la fonction  $\sin(u)$  est définie et dérivable sur I et  $(\sin(u))' = u'\cos(u)$ 





On considère la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin(9x + 1)$ . Calculer la dérivée f' de f.

#### Corrigé:

f est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

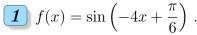
On reconnaît ici  $\sin(u)$  où u(x) = 9x + 1. Ainsi u'(x) = 9.

II en résulte que :  $f'(x) = 9\cos(9x+1)$ 





On considère que les fonctions f et g sont dérivables sur  $\mathbb R$  . Calculer la dérivée des fonctions dans chacun des cas.



$$2 g(x) = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right).$$

#### Solution vidéo ↓











# Convexité

# **Fonction convexe**

#### Définition 1.13

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

f est une fonction convexe sur un intervalle I si sa courbe représentative  $C_f$  est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.

f est une fonction convexe sur un intervalle I si chacune de ses tangentes sont en dessous de la courbe représentative  $C_f$ .

# **Fonction concave**

#### Définition 1.14

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

f est une fonction concave sur un intervalle I si sa courbe représentative  $C_f$  est située entièrement en-dessous de chacune de ses tangentes.

f est une fonction concave sur un intervalle I si chacune de ses tangentes sont au-dessus de la courbe représentative  $C_f$ . Nous avons tracé ci-dessous 3 tangentes à la courbe  $C_f$ .

# Relation avec la dérivée seconde et la convexité

# Définition 1.15

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

f est convexe sur I si et seulement si  $f''(x) \ge 0$  sur I.

f est concave sur I si et seulement si  $f''(x) \leq 0$  sur I.





Lien convexité d'une fonction f et signe de la dérivée seconde de f

# 1 On considère la forction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 6$$

Etudier la convexité de f.

#### Solution vidéo ↓





## 4 Relation avec la dérivée et la convexité

#### Définition 1.16

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si f est convexe sur I alors f' est croissante sur I.

Si f est concave sur I alors f' est décroissante sur I.

5 Point

#### **Point d'inflexion**

#### Définition 1.17

Un point d'inflexion est un point où la courbe représentative traverse sa tangente. Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

ė

#### Définition 1.18

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

f possède un point d'inflexion lorsque sa dérivée seconde s'annule et change de signe en ce point.

ė