

Les équations différentielles

Sujets Type bac



Jai20enMaths

I Cinq exos types pour préparer le BAC :)

Exercice 1



Type bac : Equations différentielles

On considère les équations différentielles suivantes : $(E) : y' + y = e^{-x}$ et $(E_0) : y' + y = 0$

Solution vidéo ↓



- 1 Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E) .
- 2 Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.
- 3 Démontrer qu'une fonction v , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E') si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0) .
- 4 En déduire les solutions de (E') .
- 5 Déterminer la fonction f_2 , solution de (E) , qui prend la valeur 2 en 0.

Exercice 2



Type bac : Equations différentielles

On souhaite résoudre l'équation différentielle $(E_1) : y' - 2y = \sin(x) + \cos(x)$

Solution vidéo ↓



- 1 Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' - 2y = 0$
- 2 Soient a et b deux réels, et u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = a \sin(x) + b \cos(x)$. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (E_1) .
- 3 Montrer que v est une solution de l'équation (E_1) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0) .
- 4 En déduire l'ensemble des solutions de (E_1) .

5 Déterminer la solution de l'équation (E_1) qui s'annule en 0 .

Exercice 3

Type bac : Equation différentielle et Intégrales

On considère l'équation différentielle (E_0) : $y' = y$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

Solution vidéo ↓



- 1 Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0 .
- 2 Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0) .
- 3 La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$. On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E) .
- 4 On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est solution de (E) est équivalent à $f - h$ est solution de (E_0) .
- 5 En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) .
- 6 Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
- 7 Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)] dx$.

Exercice 4

Type bac : Equation différentielle et Intégrales

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

(E) : $y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$.

Solution vidéo ↓



- 1 Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2xe^{2x} + 1$ est solution de l'équation différentielle (E) .
- 2 On pose : $y = z + h$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : $z' - 2z = 0$. Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E) .
- 3 Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0 .
- 4 Déterminer le sens de variation de g . Présenter son tableau de variations. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
- 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 - g(x) \geq 0$.
- 6 Calculer l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)] dx$.

Exercice

5



Type bac : Un peu plus difficile sur les équations différentielles

Solution vidéo ↓



L'objectif de cette exercice est d'étudier l'équation différentielle suivante : (E) $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

On rappelle qu'une solution de l'équation (E) est une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, on a :

$$u'(x) = u(x) - \frac{1}{6}[u(x)]^2$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6}{1 + 5e^{-x}}$$

- 1** On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = \frac{30e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2}$$

- 2** Montrer que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

- 3** Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$.

On désigne par g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas.

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{g(x)}$. On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$, On note g' et h' les fonctions dérivées de g et h .

- 4** Montrer que si h est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$, alors g est solution de l'équation différentielle

$$y' = y - \frac{1}{6}y^2$$

Pour tout réel positif m , on considère les fonctions g_m définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = \frac{6}{1 + 6me^{-x}}$$

- 5** Montrer que pour tout réel positif m , la fonction g_m est solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' = y - \frac{1}{6}y^2$$