# Produit Scalaire

Jai20enMaths

## I Les différentes formules du produit scalaire

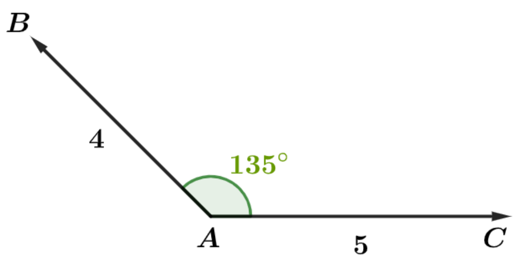
### 1 Formule du produit scalaire en utilisant la formule du cosinus

**Définition 1.1** Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

**Exemple 1**

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide de la figure ci-dessous où $AB = 4$ et $AC = 5$.




**Corrigé :**

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 5 \times \cos(135)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 5 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

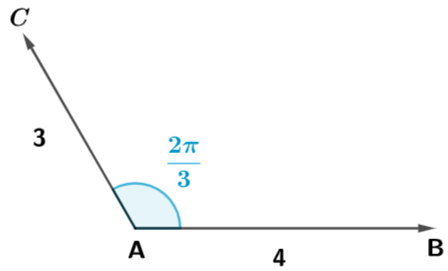
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -10\sqrt{2}$$

**Exercice 1** Produit scalaire - Définition avec le cosinus .

Solution vidéo ↓

On se place dans un repère orthonormé $(\text{O}; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

**1** Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide de la figure ci-dessous.



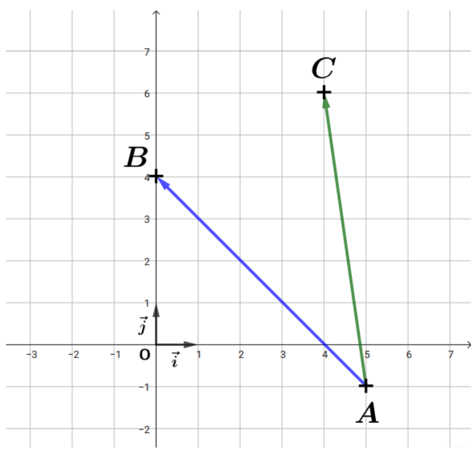

## 2 Formule du produit scalaire et définition analytique

**Définition 1.2** Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ est égal à :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

**Exemple 2**

On se place dans un repère orthonormé $(\text{O}; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide de la figure ci-dessous.



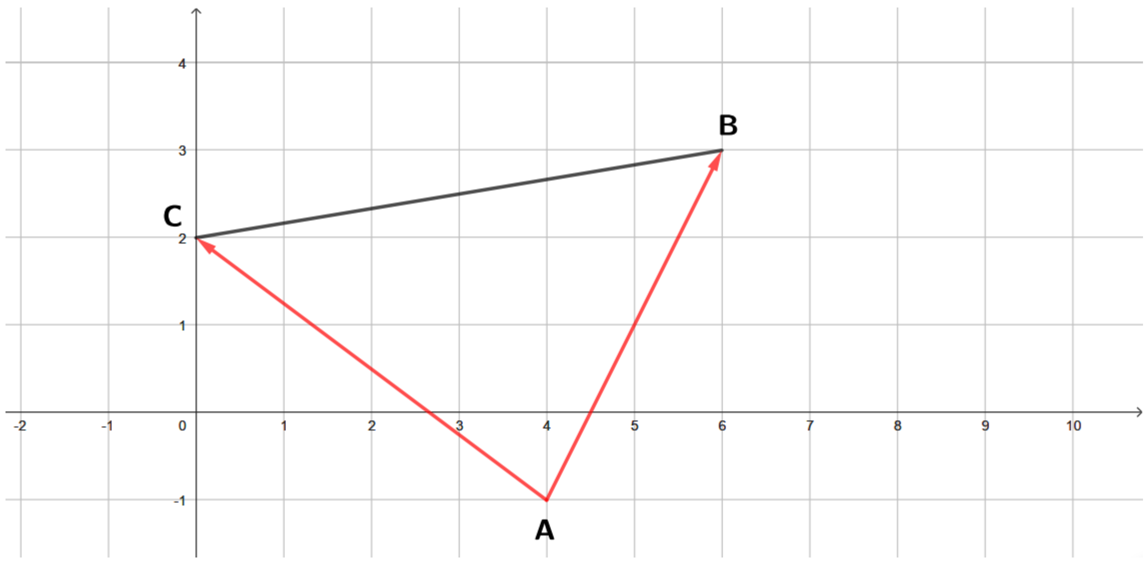
**Corrigé :**
D'après le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ nous pouvons lire que $A(5;-1)$ ; $B(0;4)$ et $C(4;6)$ .
Commençons par calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{AB}(-5;5)$
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{AC}(-1;7)$.
Il en résulte que :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-5)\times(-1) + 5\times 7$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 40$

**Exercice 2** Produit scalaire - Définition analytique (à l'aide de coordonnées) .

Solution vidéo ↓

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

**1** Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ à l'aide de la figure ci-dessous.




## 3 Expression du produit scalaire avec les longueurs dans un triangle

**Définition 1.3** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points du plan. On a :

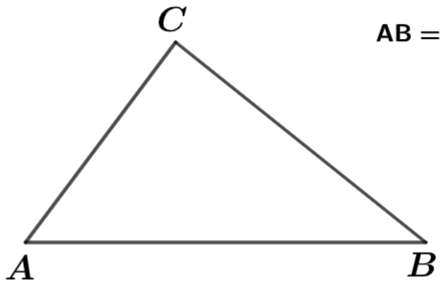
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[AB^2 + AC^2 - CB^2\right]$$



Produit Scalaire

Exemple 3

On se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide de la figure ci-dessous.




**Dans le triangle ABC on a :**

**AB = 8 cm, AC = 6 cm et BC = 7 cm.**

**Corrigé :**

D'après le rappel : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[AB^2 + AC^2 - CB^2]$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[8^2 + 6^2 - 7^2]$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[64 + 36 - 49]$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{51}{2}$

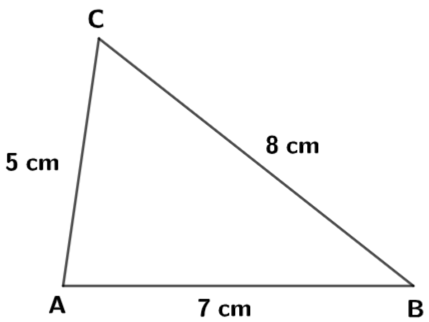
Exercice 3

Expression du produit scalaire avec les longueurs dans un triangle .

Solution vidéo ↓

On se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan.

**1** Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide de la figure ci-dessous.



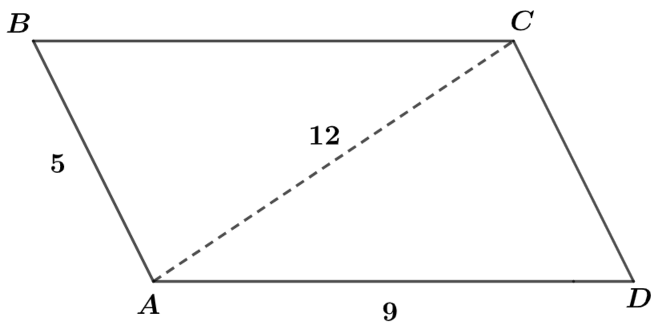
## 4 Expression du produit scalaire et parallélogramme

**Définition 1.4** On considère un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan. On considère également un parallélogramme.
Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls est défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$

**Exemple 4**

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan. $ABCD$ est un parallélogramme.
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ à l'aide de la figure ci-dessous.




**Corrigé :**
D'après la définition, on a :

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\times\left(\|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\|^2-AD^2-AB^2\right)$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\times\left(\|\overrightarrow{AC}\|^2-AD^2-AB^2\right)$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\times(12^2-9^2-5^2)$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\times(144-81-25)$

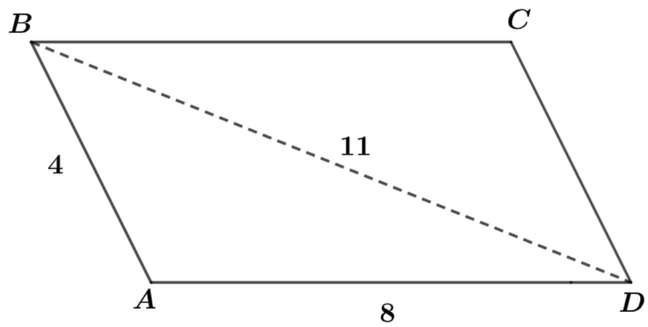
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=19$

**Définition 1.5** On considère un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan. On considère également un parallélogramme.
Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls est défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

Exemple 5

On se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan. $ABCD$ est un parallélogramme.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide de la figure ci-dessous.




**Corrigé :**
D'après la définition, on a :

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \times \left(AD^2 + AB^2 - \|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\|^2\right)$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \times \left(AD^2 + AB^2 - \|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}\|^2\right)$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \times \left(AD^2 + AB^2 - \|\overrightarrow{BD}\|^2\right)$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} (8^2 + 4^2 - 11^2)$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} (64 + 16 - 121)$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{41}{2}$

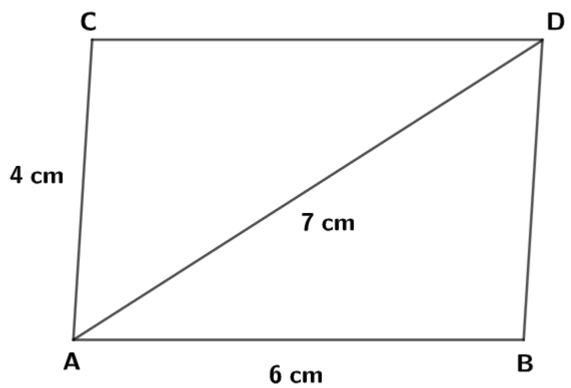
Exercice 4

Produit scalaire - Définition à l'aide des normes dans un parallélogramme.

Solution vidéo ↓

On se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan.

*1* Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide de la figure ci-dessous.



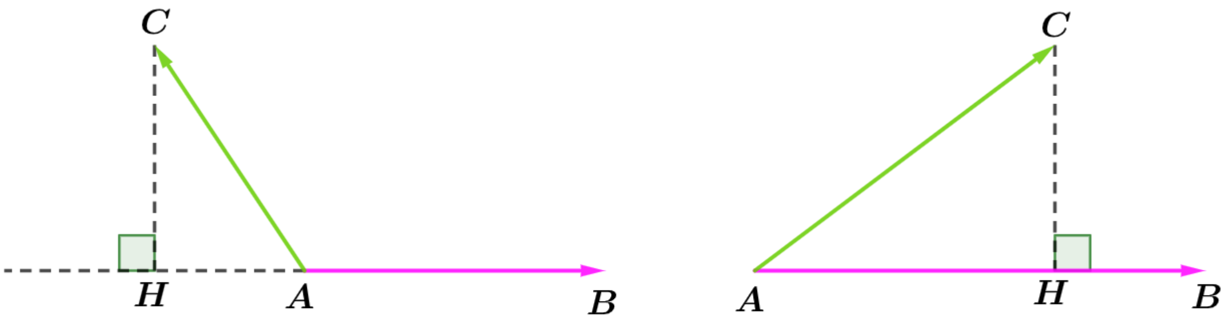
## 5 Formule du produit scalaire définition par le projeté orthogonal

**Définition 1.6** Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan. Soit $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur $(AB)$.

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est défini par :

**Situation 1 :** si les deux vecteurs forment un angle aigu, on peut écrire que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ ;

**Situation 2 :** si les deux vecteurs forment un angle obtus, on peut écrire que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$



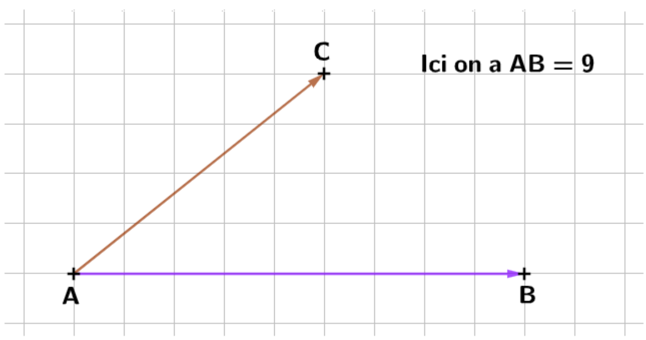

Exercice 5

Produit scalaire - Définition par le projeté orthogonal - Episode 1 .

Solution vidéo ↓

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide de la figure ci-dessous.



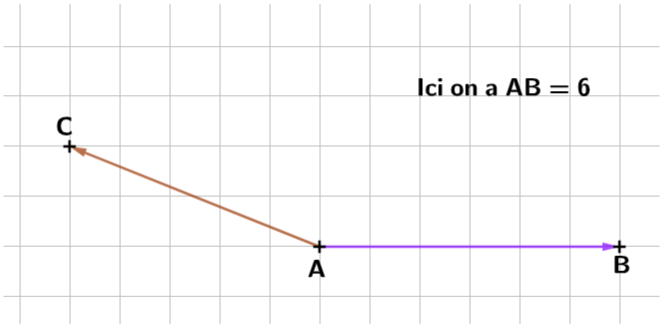
Exercice 6

Produit scalaire - Définition par le projeté orthogonal - Episode 2 .

Solution vidéo ↓

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

*1* Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide de la figure ci-dessous.




# II Théorème de la médiane

## 1 Les 3 formules à connaître

**Définition 1.7** Soient $A$ et $B$ deux points du plan et $I$ le milieu du segment $[AB]$.
Pour tout point $M$ du plan, on a :

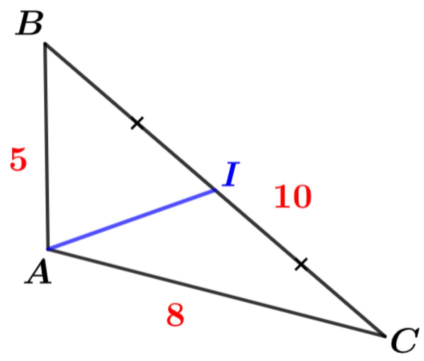
$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Exemple 6

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. $ABC$ est un triangle en sachant que $AB = 5$ ; $AC = 8$ et $BC = 10$.
Calculer la valeur exacte de la longueur de la médiane $[AI]$.




**Corrigé :**

$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$ équivaut successivement à :

$5^2 + 8^2 = 2AI^2 + \dfrac{10^2}{2}$

$25 + 64 = 2AI^2 + \dfrac{100}{2}$

$89 = 2AI^2 + 50$

$89 - 50 = 2AI^2$

$39 = 2AI^2$

$AI^2 = \dfrac{39}{2}$

$AI = \sqrt{\dfrac{39}{2}}$

# III Les formules D'AL-KASHI

## 1 Calculer une mesure avec la formule d'AL-KASHI

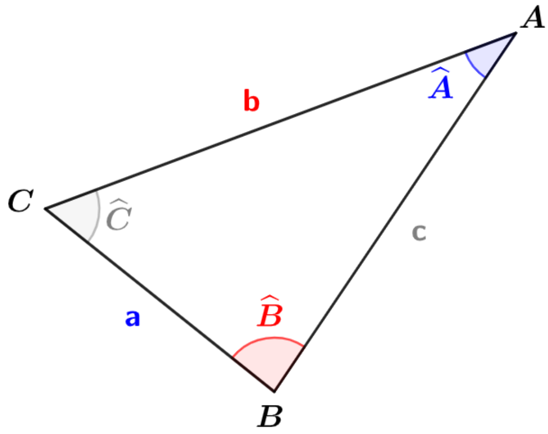
**Définition 1.8** Dans un triangle quelconque $ABC$ en prenant les notations indiquées sur la figure ci-dessous, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\widehat{A}\right)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\left(\widehat{B}\right)$$

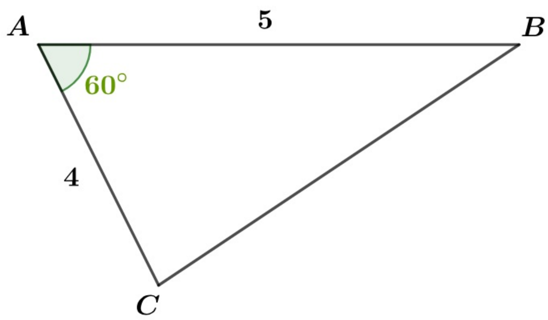
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\widehat{C}\right)$$

Produit Scalaire




Exemple 7

Soit $ABC$ un triangle tel que $AB = 5, AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 60°$. Calculer $BC$.




**Corrigé :**

D'après la définition, on a :

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \cos\left(\widehat{A}\right)$

$BC^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \cos(60)$

$BC^2 = 16 + 25 - 40 \cos(60)$

$BC^2 = 41 - 40 \cos(60)$

$BC^2 = 41 - 40 \times \dfrac{1}{2}$

$BC^2 = 41 - 20$

$BC^2 = 21$

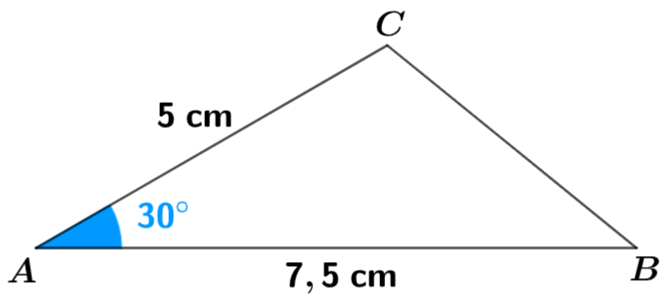
$BC = \sqrt{21}$

Exercice 7 Produit scalaire - Formule d'Al-Kashi - Calculer un côté .

Solution vidéo ↓

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

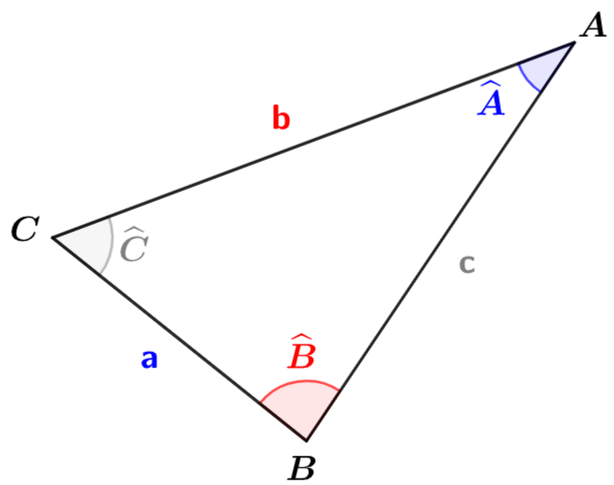
**1** Calculer la mesure du segment $[CB]$ à $10^{-2}$ près.




## 2 Calculer un angle avec la formule d'AL-KASHI

**Définition 1.9** Dans un triangle quelconque $ABC$ en prenant les notations indiquées sur la figure ci-dessous, on a :

$$\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos \widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

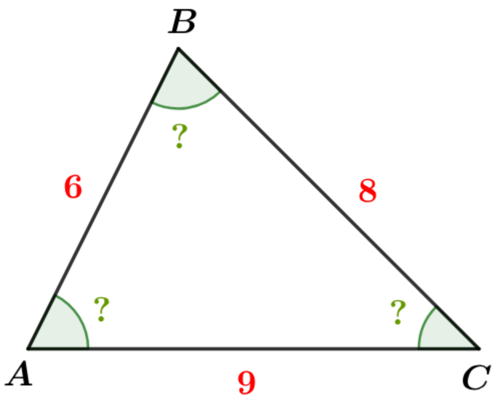





Produit Scalaire

Exemple 8

Soit $ABC$ un triangle tel que $AB = 6, AC = 9$ et $BC = 9$. Calculer $\widehat{BCA}$.




**Corrigé :**

D'après la définition, on a :

$BA^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \times CB \cos\left(\widehat{C}\right)$

$8^2 = 9^2 + 6^2 - 2 \times 9 \times 6 \cos\left(\widehat{C}\right)$

$64 = 81 + 36 - 108 \cos\left(\widehat{C}\right)$

$64 - 117 = -108 \cos\left(\widehat{C}\right)$

$-53 = -108 \cos\left(\widehat{C}\right)$

$\dfrac{-53}{-108} = \cos\left(\widehat{C}\right)$

$\widehat{C} = \cos^{-1}\left(\dfrac{-53}{-108}\right)$

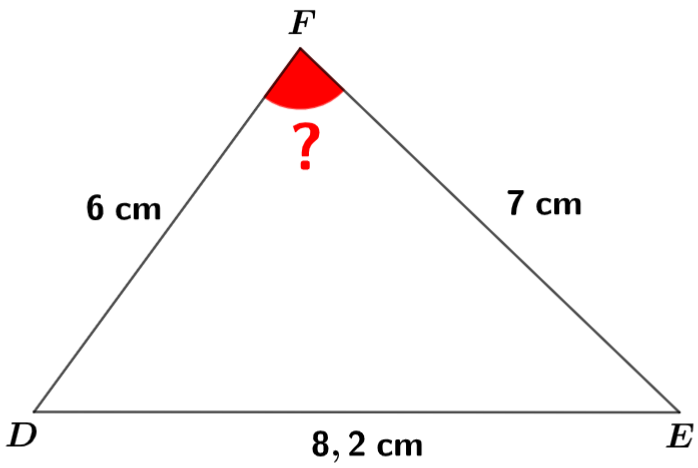
$\widehat{C} \approx 60,6$

Exercice 8 — Produit scalaire - Formule d'Al-Kashi - Calculer un angle .

Solution vidéo ↓

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

**1** Calculer une mesure de l'angle $\widehat{DEF}$ à $0,01°$ près.


F
?
6 cm
7 cm
D
8, 2 cm
E