Équations différentielles

Exercice 1 — Équation différentielle de la forme $y' = ay$.

Solution vidéo ↓

1. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 6y$. Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation (E) .
2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -4y$. Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation (E) .
3. On considère l'équation différentielle (E) : $2y' + 6y = 0$. Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation (E) .

Exercice 2 — Équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec une condition.

Solution vidéo ↓

1. On considère l'équation différentielle (E) : $3y' - 5y = 0$. Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation (E) .
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 6$.

Exercice 3 — Équation différentielle de la forme $y' = ay + b$.

Solution vidéo ↓

1. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + 6$. Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation (E) .
2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -4y + 3$. Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation (E) .
3. On considère l'équation différentielle (E) : $2y' - 10y + 8 = 0$. Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation (E) .

Exercice 4 — Équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec une condition.

Solution vidéo ↓

1 On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 4y + 8$.
Déterminer la forme générale
des fonctions solutions de l'équation (E) .

2 Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(1) = 7$

Exercice 5 — SUJET TYPE BAC . Equation différentielle et Intégrales.

Solution vidéo ↓

On considère l'équation différentielle (E_0) : $y' = y$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.
On considère l'équation différentielle
(E) : $y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$ où y
est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1 Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0 .

2 Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0) .

3 La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$. On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).

4 On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est solution de (E) est équivalent à $f - h$ est solution de (E_0).

5 En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

6 Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.

7 Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)]\, dx$.

Exercice 6 — SUJET TYPE BAC . Equation différentielle et Intégrales.

Solution vidéo ↓

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
(E) : $y' - 2y = 2\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)$.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^{2x} + 1$.

1 Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = 2x\mathrm{e}^{2x} + 1$ est solution de l'équation différentielle (E).

2 On pose : $y = z + h$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : $z' - 2z = 0$. Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E).

3 Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0 .

4 Déterminer le sens de variation de g. Présenter son tableau de variations. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 - g(x) \geqslant 0$.

6 Calculer l'intégrale : $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)]\mathrm{d}x$.