Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 1 — Le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution vidéo ↓

1 Soit le tableau de variation donné ci-dessous. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty; +\infty[$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
variation de $f(x)$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

2 Soit le tableau de variation donné ci-dessous. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[5; +\infty[$.

x	-5		-1		6		α		$+\infty$
variation de $f(x)$	10	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	-9

3 Soit le tableau de variation donné ci-dessous. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty; 7]$.

x	$-\infty$		α		-4		2		7
variation de $f(x)$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	6

Exercice 2 Un exercice type contrôle.

Solution vidéo ↓

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

1 Etudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

2 Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et donner son tableau de variation.

3 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

4 En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

5 Soit g la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$.

Démontrer que $g'(x) = \dfrac{2x\left(x^3-3x-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$.

6 Déteminer le signe de $g'(x)$ sur $]1;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de g sur $]1;+\infty[$.

Exercice 3 Étudier la continuité d'une fonction en un réel.

Solution vidéo ↓

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x < 1 \\ 2x^2+4 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

1 Démontrer que f est continue sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

2 La fonction f elle continue en 1 ?