



I Notion de limite d'une suite

1 Limite infinie

Définition 1.1 Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$, où A est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 . On note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Définition 1.2 Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$, où A est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 . On note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

2 Limite finie et suite convergente

Définition 1.3 Une suite (u_n) est convergente lorsqu'il existe un réel ℓ tel que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 . On note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Définition 1.4 Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

3 Suite divergente

Définition 1.5 Si une suite (u_n) diverge, il y a donc deux cas possibles :

- soit la suite diverge vers $-\infty$ ou $+\infty$
- soit la suite n'a aucune limite ni finie, ni infinie.

4 Les limites usuelles

Définition 1.6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Les suites de terme général $n, n^2, \sqrt{n}$ divergent.

Les suites de terme général $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\sqrt{n}}$ convergent.

5 Limite d'une suite géométrique

Définition 1.7 Soit q un réel.

Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

Si $q \leq -1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ n'existe pas.

Exemple 1

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times \left(-\frac{5}{6}\right)^n + 2$

Corrigé :

Comme $-1 < -\frac{5}{6} < 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{5}{6}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times \left(-\frac{5}{6}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times \left(-\frac{5}{6}\right)^n + 2 = 2$$

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

Exercice

1



Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1 $u_n = 3 \times (0,4)^n$

2 $u_n = 2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$

3 $u_n = -4 \times \left(\frac{7}{6}\right)^n$

4 $u_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 0,6$

Solution vidéo ↓



Opérations sur les limites

1 Limite d'une somme

Soient ℓ et ℓ' deux réels.

(u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
(v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$(u_n + v_n)$ a donc pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

Exemple

2



On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n^2 + 4n - 5$.
En déduire la limite de (u_n) .

Corrigé :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n - 5 = +\infty \end{array} \right\} \text{ par somme : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 + 4n - 5 = +\infty$$

Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

2 Limite d'un produit

Soient ℓ et ℓ' deux réels.

(u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
(v_n) a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
$(u_n \times v_n)$ a donc pour limite	$\ell \times \ell'$	∞	forme indéterminée	∞

Il faudra bien entendu appliquer la règle des signes afin d'avoir comme résultat soit $-\infty$ ou $+\infty$.

Exemple 3

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (2n + 3)(-5n + 2)$.
En déduire la limite de (u_n) .

Corrigé :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + 3 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -5n + 2 = -\infty \end{array} \right\} \text{ par produit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n + 3)(-5n + 2) = -\infty$$

$$\text{Finalement : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

3 Limite d'un quotient

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Dans ce tableau, FI signifie forme indéterminée.

(u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
(v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	0^+ ou 0^-	0	∞	ℓ'	∞
$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a donc pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$	FI	0	$\pm\infty$	FI

Exemple 4

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{2}{6n + 5}$.
En déduire la limite de (u_n) .

Corrigé :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 6n + 5 = +\infty \end{array} \right\} \text{ par quotient : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{6n + 5} = 0$$

$$\text{Finalement : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Exercice 2



Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1 $u_n = 2n$

2 $u_n = -4n$

3 $u_n = 2n - 6$

4 $u_n = -n^2$

5 $u_n = 2n^2 + 5n + 6$

6 $u_n = (4 - n)(1 - n^2)$

7 $u_n = \frac{5}{n}$

8 $u_n = \frac{-5}{2n + 6}$

Solution vidéo ↓



Formes indéterminées

1 Les formes à reconnaître

Définition 1.8 Les quatre formes indéterminées à connaître sont

$$\begin{array}{l} \cdot \frac{0}{\infty}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \times \infty; \infty - \infty \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

2 Lever une forme indéterminée à l'aide de la factorisation (polynôme)

Définition 1.9 Pour étudier la limite en $+\infty$ d'une suite dont le terme générale est un polynôme il faut factoriser par le terme de plus haut degré.

Exemple 5



On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n^2 - 4n + 1$. En déduire la limite de (u_n) .

Corrigé :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -n + 1 = -\infty \end{array} \right\} \text{ par addition, nous avons une forme indéterminée.}$$

Pour lever cette indétermination, nous allons factoriser par le monôme de plus haut degré. Ici, en l'occurrence par n^2 . Il vient alors que :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 - 4n + 1 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\frac{3n^2 - 4n + 1}{n^2} \right) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 - 4n + 1 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\frac{3n^2}{n^2} - \frac{4n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 - 4n + 1 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(3 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} &= 3 \end{aligned} \right\} \text{ par produit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(3 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty.$$

Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 - n + 1 = +\infty$

Exercice

3



Solution vidéo ↓

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1 $u_n = 2n^2 - 3n + 6$

2 $u_n = 4n^2 - 3n^3 + 2n - 7$



3 Lever une forme indéterminée à l'aide de la factorisation (quotient de polynômes)

Définition 1.10 Pour étudier la limite en $+\infty$ d'une suite dont le terme générale est un quotient de polynômes il faut factoriser le numérateur et le dénominateur par leur terme de plus haut degré.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + 3 &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ par quotient, nous avons une forme indéterminée.}$$

Pour lever cette indétermination on va factoriser le numérateur par le monôme de plus haut degré c'est à dire par n et le dénominateur par le monôme de plus haut degré c'est à dire par n Il vient alors que :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n+3} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(\frac{n+1}{n} \right)}{n \left(\frac{2n+3}{n} \right)} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n+3} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n} \right)}{n \left(\frac{2n}{n} + \frac{3}{n} \right)} \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n \left(2 + \frac{3}{n}\right)}$. On simplifie par n au numérateur et au dénominateur, et on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{3}{n} = 2 \end{array} \right\} \text{ par quotient : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{2}$$

Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}$

Exercice

4



Déterminer la limite de la suite (u_n) dans le cas suivant :

1 $u_n = \frac{2n-4}{n^2+3n+5}$

Solution vidéo ↓



IV Limites et comparaison

1 théorème des gendarmes

Le théorème des gendarmes permet de déterminer une limite finie.

Définition 1.11 Soit ℓ un réel, (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que :

$u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang,

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$

Exemple

6



On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{5 + (-1)^n}{n}$.

En déduire la limite de (u_n) .

Corrigé :

Pour tout entier naturel n non nul, on sait que : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ équivaut successivement à :

$$-1 + 5 \leq 5 + (-1)^n \leq 5 + 1$$

$$4 \leq 5 + \cos(n) \leq 6$$

On va ensuite diviser par n qui est strictement positif

$$\frac{4}{n} \leq \frac{5 + (-1)^n}{n} \leq \frac{6}{n}$$

$$\frac{4}{n} \leq u_n \leq \frac{6}{n}$$

Dans un premier temps :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 = \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n = \\ +\infty \end{array} \right\} \text{ par quotient } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0$$

Dans un second temps :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 6 = \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n = \\ +\infty \end{array} \right\} \text{ par quotient } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{n} = 0$$

Nous savons que : $\frac{4}{n} \leq u_n \leq \frac{6}{n}$

D'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exercice 5



Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1 $u_n = \frac{2 + \cos(n)}{n + 1}$

2 $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1}$

Solution vidéo ↓



2 théorème de comparaison

Le théorème de comparaison permet de déterminer une limite infinie.

Définition 1.12 Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir

- d'un certain rang,
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
-

Exemple 7



On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{5 + (-1)^n}{n}$.

En déduire la limite de (u_n) .

Corrigé :

Pour tout entier naturel n , on sait que :

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$ équivaut successivement à :

$-1 + n + 2 \leq (-1)^n + n + 2 \leq 1 + n + 2$

$n + 1 \leq u_n \leq n + 3$

D'une part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$

D'autre part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 3 = +\infty$

Attention, ici on n'applique pas le théorème des gendarmes car les limites ne sont pas des valeurs finies.

On va garder l'inégalité de gauche, ce qui donne : $n + 1 \leq u_n$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$ et $u_n \geq n + 1$ alors d'après le théorème de comparaison

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Exercice 6



Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1 $u_n = (-1)^n + n^2$

2 $u_n = -2n + \cos(n)$

Solution vidéo ↓



Limites de suites monotones

1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 1.13 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n : $u_n \leq M$.
- **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n : $u_n \geq m$.
- **bornée** si elle est majorée et minorée. Autrement dit, s'il existe deux réels m et M tel que, pour tout entier naturel n on a : $m \leq u_n \leq M$

2 Théorème de convergence des suites monotones

Définition 1.14 Une suite décroissante et minorée est convergente, elle admet
• donc une limite finie.

• Une suite croissante et majorée est convergente, elle admet donc une limite finie.

•