Calcul intégral

Jai20enMaths

I Calcul intégral

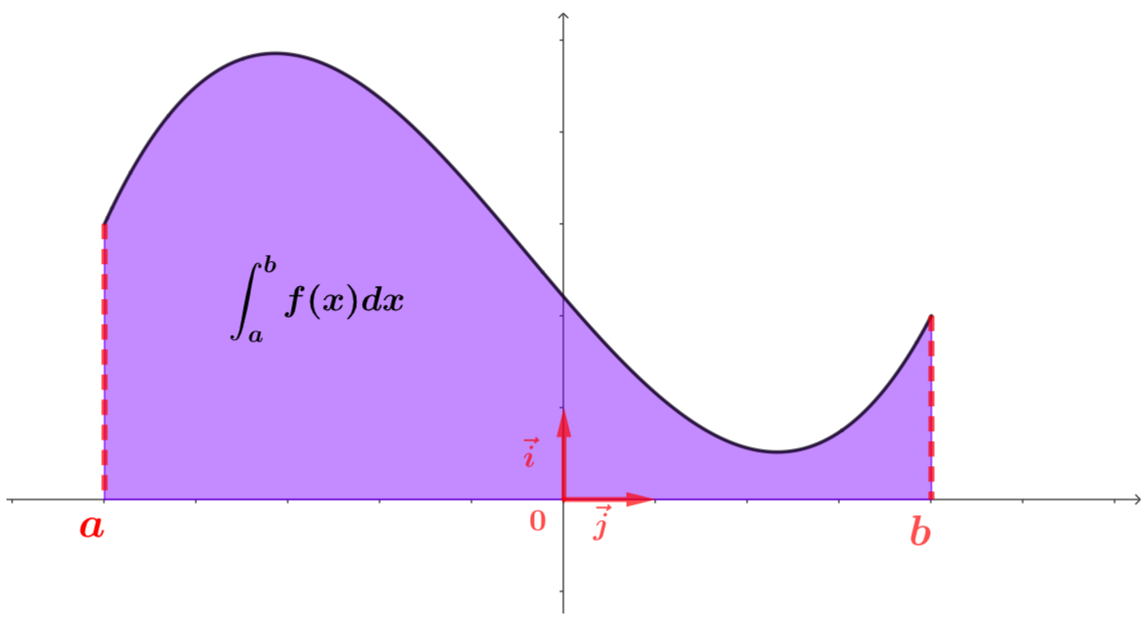
1 Définition de l'intégrale : aire sous la courbe représentative d'une fonction

Définition 1.1

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
L'aire (surface) du domaine délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est appellée intégrale de a à b de la fonction f.
On note alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

L'aire est exprimée en unité d'aire.



2 Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Définition 1.2

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

Définition 1.3

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On note F une primitive de f sur $[a;b]$.
On a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple 1

Calculer l'intégrale : $I = \int_0^1 (6x+2)\,\mathrm{d}x$

Corrigé :

$I = \int_0^1 (6x+2)\,\mathrm{d}x$
$I = [3x^2 + 2x]_0^1$
$I = 3\times 1^2 + 2\times 1 - (3\times 0^2 + 2\times 0)$
$I = 5$

Exercice 1 Calculer une intégrale : Partie 1

Solution vidéo ↓

Calculer les intégrales suivantes :

1. $A = \int_0^1 (2x+1)\,dx$
2. $B = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right) dx$

Exercice 2 Calculer une intégrale : Partie 2

Solution vidéo ↓

Calculer les intégrales suivantes :

1. $A = \int_1^2 \frac{2}{x} - e^x dx$
2. $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(x) + 5\cos(x)dx$

3 Propriétés Algébriques : Linéarité de l'intégrale

Définition 1.4

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . Les réels a et b appartiennent à I .
Soit α un réel.

$$\int_a^b af(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Exemple 2

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x \,\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x \,\mathrm{d}x$.
Calculer $I+J$.

Corrigé :

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x \,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x \,\mathrm{d}x$$

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x\cos^2 x + x\sin^2 x\right) \,\mathrm{d}x$$

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) \,\mathrm{d}x$$

Or, pour tout réel x, on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, ce qui donne :

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \times 1 \,\mathrm{d}x$$

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \,\mathrm{d}x$$

$$I+J = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I+J = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] - \left[\frac{1}{2}(0)^2\right]$$

$$I+J = \frac{\pi^2}{8}$$

4 Propriétés Algébriques : La relation de Chasles

Définition 1.5

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels appartenant à I.

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Exemple 3

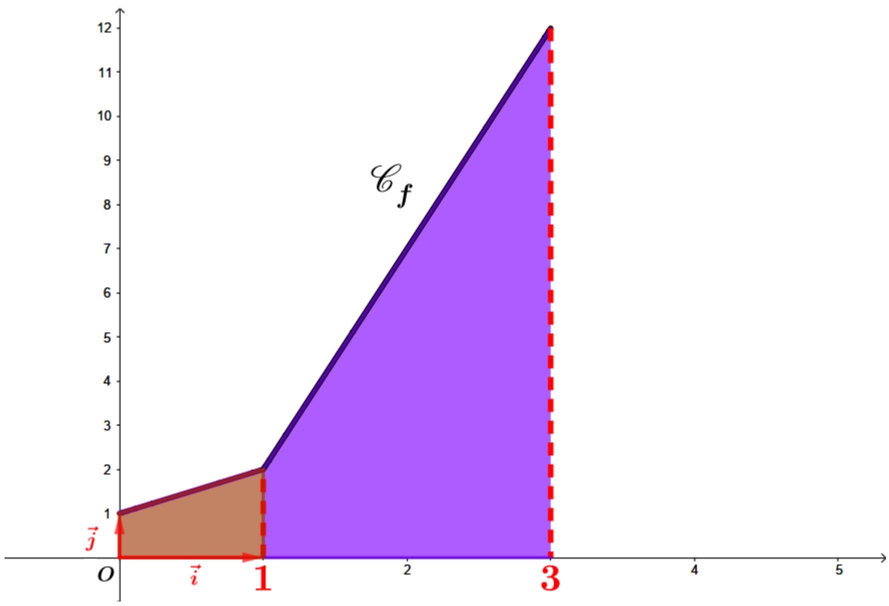
Soit f la fonction définie et continue sur l'intervalle $[0;3]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x\in[0;1] \\ 5x-1 & \text{si } x\in[1;3] \end{cases}$$

Calculer $I=\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

Corrigé :

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 x+3dx+\int_1^3 5x-1dx$$
$$\int_0^2 f(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^1+\left[\frac{5}{2}x^2-x\right]_1^3$$
$$\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\times 1^2+3\times 1-\left(\frac{1}{2}\times 0^2+3\times 0\right)-\left(\frac{5}{2}\times 3^2-3-\left(\frac{5}{2}\times 1^2-1\right)\right)$$
$$\int_0^2 f(x)dx=\frac{43}{2}$$



5 Valeur moyenne

Définition 1.6

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
La valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ est le réel m défini par :

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

CALCUL INTÉGRAL

Exemple 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + x$
Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0; 2]$.

Corrigé :

$$m = \frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)\,dx$$
$$m = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(3x^2 + x\right)dx$$
$$m = \frac{1}{2}\left[x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$
$$m = \frac{1}{2}\left(2^3 + \frac{1}{2}\times 2^2 - \left(0^3 + \frac{1}{2}\times 0^2\right)\right)$$
$$m = 5$$

Remarque :

Si f est positive sur $[a; b]$, m correspond à la hauteur du rectangle construit sur $[a; b]$, dont l'aire, exprimée en u.a. est égale à $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Exercice 3 — Valeur moyenne

Solution vidéo ↓

1 Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ sur l'intervalle $[-1; 2]$.

6 Intégrales et inégalités

Positivité de l'intégrale.

Définition 1.7

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

Si $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Exemple 5

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_0^1 (1 + t^n)\,\mathrm{d}t$.

Justifier que la suite (u_n) est minorée par 0.

Corrigé :

Pour tout entier naturel n et pour tout $t \in [0; 1]$, on a :
$t^n \geq 0$ et donc $1 + t^n \geq 1 \geq 0$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

D'après la positivité de l'intégrale, on peut affirmer que : $\int_0^1 (1 + t^n)\,\mathrm{d}t \geq 0$.

Autrement dit $u_n \geq 0$. La suite (u_n) est bien minorée par 0.

Intégration d'une inégalité

Définition 1.8

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.
Si $f \geq g$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Exemple 6

Démontrer que pour tout réel $t \in [1;3]$, on a : $10 \leq \int_1^3 (3t+2)\,dt \leq 22$

Corrigé :

Soit $t \in [1;3]$, il vient alors que :
$1 \leq t \leq 3$ équivaut successivement à
$3 \leq 3t \leq 9$
$3+2 \leq 3t+2 \leq 9+2$
$5 \leq 3t+2 \leq 11$
On peut alors écrire que : $\int_1^3 5dt \leq \int_1^3 3t+2dt \leq \int_1^3 11dt$

Calculons d'une part : $\int_1^3 5dt = [5t]_1^3 = 5\times 3 - 5\times 1 = 10$

Calculons d'autre part : $\int_1^3 11dt = [11t]_1^3 = 11\times 3 - 11\times 1 = 22$

Finalement :$10 \leq \int_1^3 (3t+2)\,dt \leq 22$

7 Intégration par parties

Définition 1.9

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I dont leurs dérivées u' et v' sont continues sur I. Pour tous réels a et b de I, nous avons alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

CALCUL INTÉGRAL

Exemple 7

Calculer l'intégrale suivante avec la méthode d'intégration par parties : $A = \int_0^1 2xe^x dx$

Corrigé :

Pour tout réel x de $I = [0;1]$, on pose :

$u(x) = 2x$ on détermine u' **la dérivée** de u $u'(x) = 2$

$v'(x) = e^x$ on détermine v **une primitive** de v' $v(x) = e^x$

Les fonctions u et v sont dérivables sur I et les fonctions u' et v' sont continues sur I.

D'après la formule d'intégrations par parties :

$A = \displaystyle\int_0^1 2xe^x dx$

$A = [2xe^x]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 2e^x dx$

$A = [2xe^x]_0^1 - [2e^x]_0^1$

$A = (2 \times 1 \times e^1 - 2 \times 0 \times e^0) - (2e^1 - 2e^0)$

$A = 2e - (2e - 2) = 2$

Exercice 4 Intégration par parties pour s'exercer

Solution vidéo ↓

1. Calculer $A = \displaystyle\int_0^1 5xe^x dx$
2. Calculer $B = \displaystyle\int_1^e x \ln x dx$

8 Calculer l'aire entre deux courbes

Définition 1.10

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$.

On note $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives respectives de f et g.

L'aire du domaine délimitée par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire, est égale à :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

Exemple 8

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et } g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

On admet que $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in [0;1]$ d'où : $f(x) - g(x) \geq 0$

Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Corrigé :

$$\int_0^1 f(x) - g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 1 \ \mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 f(x) - g(x)\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + x\right]_0^1$$

$$\int_0^1 f(x) - g(x)\mathrm{d}x = e - 4e^{\frac{1}{2}} + 1 - (1 - 4 + 0)$$

$$\int_0^1 f(x) - g(x)\mathrm{d}x = e - 4e^{\frac{1}{2}} + 4$$