Les équations différentielles Sujets Type bac

Jai20enMaths

I Quatre exos types pour préparer le BAC :)

Exercice 1 Type bac : Equations différentielles

Solution vidéo ↓

On considère les équations différentielles suivantes : $(E) : y' + y = e^{-x}$ et $(E_0) : y' + y = 0$

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E) .
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction v, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E') si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire les solutions de (E').
5. Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0 .

Exercice 2 Type bac : Equations différentielles

Solution vidéo ↓

On souhaite résoudre l'équation différentielle
$(E_1) : y' - 2y = \sin(x) + \cos(x)$

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' - 2y = 0$
2. Soient a et b deux réels, et u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (E_1).
3. Montrer que v est une solution de l'équation (E_1) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E_1).

5 Déterminer la solution de l'équation (E_1) qui s'annule en 0 .

Exercice 3 — Type bac : Equation différentielle et Intégrales

Solution vidéo ↓

On considère l'équation différentielle (E_0) : $y' = y$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.
On considère l'équation différentielle
(E) : $y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$ où y
est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1 Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0 .

2 Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0) .

3 La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$. On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).

4 On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est solution de (E) est équivalent à $f - h$ est solution de (E_0).

5 En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

6 Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.

7 Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right] dx$.

Exercice 4 — Type bac : Equation différentielle et Intégrales

Solution vidéo ↓

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
(E) : $y' - 2y = 2\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)$.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^{2x} + 1$.

1 Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = 2x\mathrm{e}^{2x} + 1$ est solution de l'équation différentielle (E).

2 On pose : $y = z + h$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : $z' - 2z = 0$. Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E).

3 Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0 .

4 Déterminer le sens de variation de g. Présenter son tableau de variations. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 - g(x) \geqslant 0$.

6 Calculer l'intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)]\mathrm{d}x$.