

Jai20enMaths

Exemple 1



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$. Démontrer que f est dérivable en 3 et calculer $f'(3)$

Corrigé :

Pour tout $h \neq 0$, on commence par calculer le taux d'accroissement de f entre 3 et $3 + h$, on a :

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{3(3+h)^2 + 4(3+h) - 5 - (3 \times 3^2 + 4 \times 3 - 5)}{h}$$

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{3(9 + 6h + h^2) + 12 + 4h - 5 - 34}{h}$$

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{27 + 18h + 3h^2 + 12 + 4h - 5 - 34}{h}$$

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{3h^2 + 22h}{h} = 3h + 22$$

$$\text{Or } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3h + 22 = 22.$$

Il en résulte donc que f est dérivable en 3 et $f'(3) = 22$.

Exercice 1



Montrer que f est dérivable en a .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

1 Soit h un réel non nul. Calculer le taux d'accroissement de f entre 2 et $2 + h$.

2 En déduire $f'(2)$.

3 Remarque : L'énoncé suivant : montrer que f est dérivable en 2 et donner la valeur du nombre dérivé de f en 2 résumant les deux questions précédentes.

Solution vidéo ↓



3 Lecture graphique et nombre dérivée

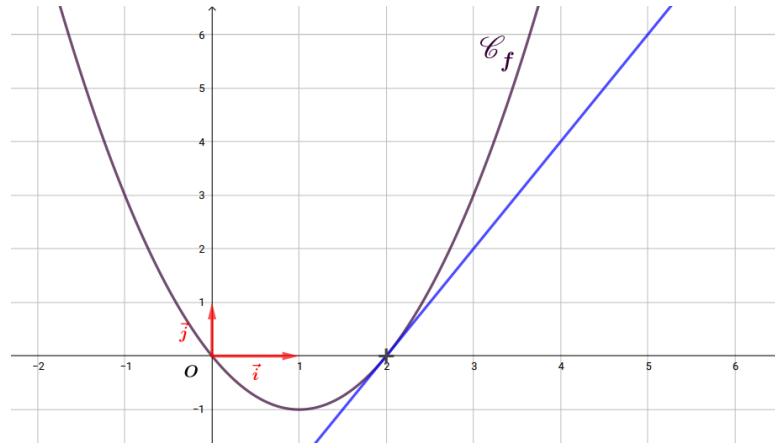
Définition 1.3

- Si la fonction f est dérivable en a , alors la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$
- au point d'abscisse a est la droite T qui passe par le point $A(a; f(a))$ et dont le
- coefficient directeur est le nombre dérivé $f'(a)$.
-

Exemple 2



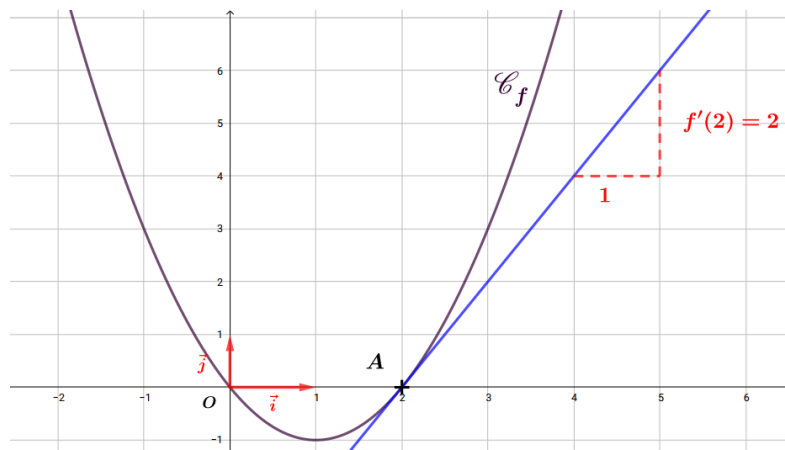
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous. La tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est également tracée.

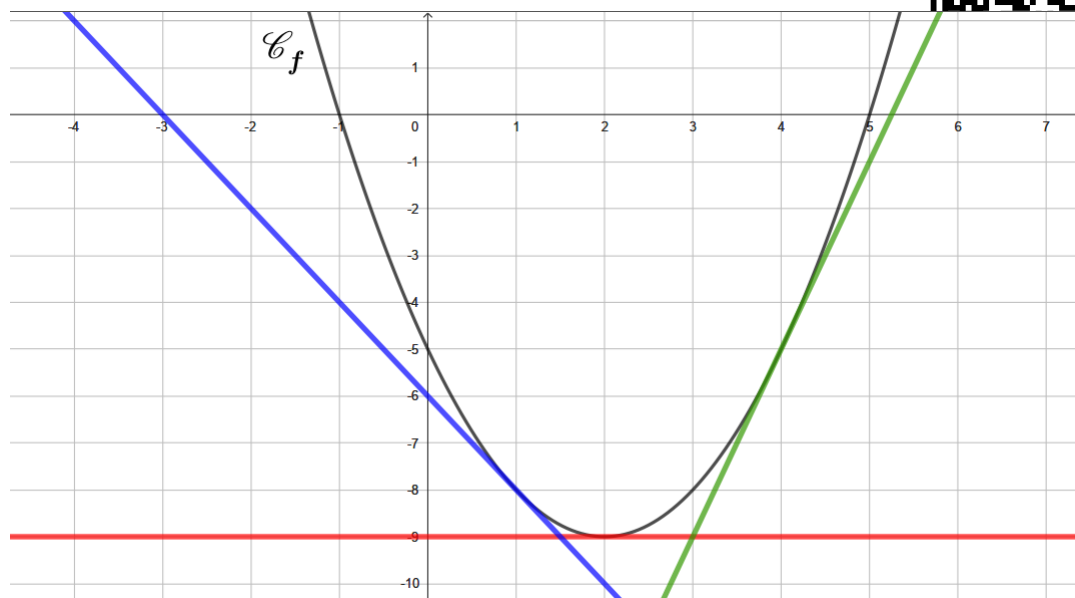
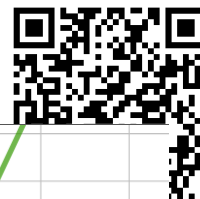


Lire graphiquement $f'(2)$.

Corrigé :

$f'(2)$ correspond au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2. D'après le graphique ci-dessous on peut facilement lire que $f'(2) = 2$.





- 1 Lire graphiquement $f'(2)$.
- 2 Lire graphiquement $f'(1)$.
- 3 Lire graphiquement $f'(4)$.

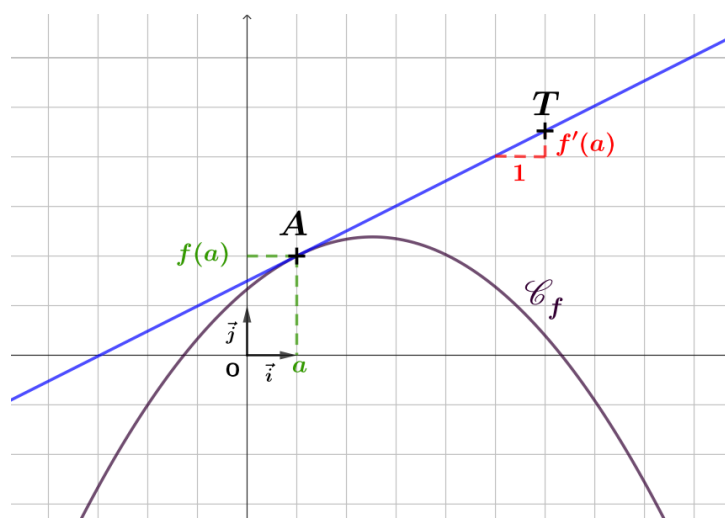
4 Equation de tangente

Définition 1.4

- L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a
- est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

•





Dérivées des fonctions usuelles

1 La dérivée d'une fonction constante

Définition 1.5

- Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = m$.
- Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$

Exemple 3



Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 20$.

Corrigé :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

2 La dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto mx + p$

Définition 1.6

- Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
- Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = m$

Exemple 4



Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x + 4$.

Corrigé :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2$.

3 La dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto x^2$

Définition 1.7

- On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
- Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$

4 La dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto x^3$

Définition 1.8

- On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
- Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$

5 La dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto x^n$ où $n \geq 1$

Définition 1.9

- On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ où n est un entier naturel non nul.
- Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$

Exemple 5

Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^5$.

Corrigé :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$.

6 La dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto ku(x)$ (Dérivée d'un produit par une constante)

Définition 1.10

- Soit $k \in \mathbb{R}$. Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .
- On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ku(x)$.
- Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = ku'(x)$

Exemple 6

Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3x^6 + 5x^3 + 4x^2 + 9x - 1.$$

Corrigé :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -3 \times 6x^5 + 5 \times 3x^2 + 4 \times 2x + 9$$

$$f'(x) = -18x^5 + 15x^2 + 8x + 9$$

Exercice 3

Les dérivées usuelles Partie 1 .

Pour les fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, calculer la fonction dérivée.

1 $f(x) = 5$

2 $g(x) = -2$

3 $h(x) = 4x$

4 $f(x) = x$

5 $g(x) = 6x - 2$

6 $h(x) = 3x^2$

7 $p(x) = 5x^2$

Solution vidéo ↓



$$8 \quad g(x) = 4x^2 - 9x + 6$$

$$9 \quad f(x) = 2x^3$$

$$10 \quad f(x) = -4x^3$$

$$11 \quad h(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x + 1$$

7 La dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto \frac{1}{x}$

Définition 1.11

- On considère la fonction inverse définie sur $] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
- Alors f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$ et, pour tout $x \in] -\infty; 0[$ et $x \in] 0; +\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

8 La dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto \sqrt{x}$

Définition 1.12

- On considère la fonction racine carrée définie sur $] 0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
- Alors f est dérivable sur $] 0; +\infty[$ et, pour tout $x \in] 0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Exercice

4

Les dérivées usuelles Partie 2 .

Solution vidéo ↓



- Calculer la fonction dérivée de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 3x^6 - 5x + 1$.
- Calculer la fonction dérivée de la fonction f dérivable sur $] 0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x} + 5\sqrt{x} + 2x^7 - 8x + 9$.



Opérations sur les fonctions dérivées

1 Dérivée d'une somme

Définition 1.13

- Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , alors leur somme $u + v$ est également dérivable sur I , et pour tout $x \in I$:

$$(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$$

2 Dérivée d'un produit

Définition 1.14

- Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , alors leur somme $u \times v$ est également dérivable sur I , et pour tout $x \in I$:

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Exemple 7

Soit f la fonction dérivable sur $]-\infty; +\infty[$ et définie par $f(x) = (3x - 1)(2x + 6)$. Déterminer l'expression de la dérivée f' de f .

Corrigé :

On reconnaît la forme $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = 2x + 6$

Ainsi : $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2$.

Il vient alors que :

$$f'(x) = 3 \times (2x + 6) + (3x - 1) \times 2$$

$$f'(x) = 3 \times 2x + 3 \times 6 + 3x \times 2 + (-1) \times 2$$

$$f'(x) = 6x + 18 + 6x - 2$$

$$f'(x) = 12x + 16$$

Exercice 5

La dérivée d'un produit $u \times v$.

Solution vidéo ↓

- 1 Calculer la fonction dérivée de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 4)(5x + 2)$.

- 2 Calculer la fonction dérivée de la fonction f dérivable sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.



3 Dérivée d'un inverse

Définition 1.15

- Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que pour tout réel x de I , $u(x) \neq 0$.
- Alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{u(x)}$ est définie et dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$.

Exemple 8

Soit f la fonction dérivable sur $] -1; 1[$ et définie par $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
Déterminer l'expression de la dérivée f' de f .

Corrigé :

On reconnaît la forme $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1 - x^2$

Ainsi : $u'(x) = -2x$.

Il vient alors que :

$$f'(x) = \frac{-(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

4 Dérivée d'un quotient

Définition 1.16

- Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , telle que pour tout réel x de I , $v(x) \neq 0$.
- Alors la fonction quotient $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Exemple 9

Soit f la fonction dérivable sur $]1; +\infty[$ et définie par $f(x) = \frac{3x+4}{2x-2}$.
Déterminer l'expression de la dérivée f' de f .

Corrigé :

On reconnaît la forme $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 3x + 4$ et $v(x) = 2x - 2$

Ainsi : $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2$. Il vient alors que :

$$f'(x) = \frac{3 \times (2x - 2) - (3x + 4) \times (2)}{(2x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x - 6 - (6x + 8)}{(2x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x - 6 - 6x - 8}{(2x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-14}{(2x - 2)^2}$$

Exercice 6

► La dérivée d'un quotient $\frac{u}{v}$.

1 Soit f une fonction dérivable sur $\left]-\frac{7}{4}; +\infty\right[$ et définie par $f(x) = \frac{3x + 6}{4x + 7}$. Calculer la dérivée de la fonction f .

2 Soit f une fonction dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et définie par $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{-6x - 3}$. Calculer la dérivée de la fonction f .

Solution vidéo ↓



5 Dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto \sqrt{ax + b}$

Définition 1.17

• Soit la fonction racine carrée dérivable sur un intervalle I et soit J un intervalle tel que, pour tout réel x de J , $ax + b$ appartient à I .

• Ainsi : $(\sqrt{ax + b})' = \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$

Exemple 10

Soit f la fonction dérivable sur $]2; +\infty[$ et définie par $f(x) = \sqrt{5x - 10}$. Déterminer l'expression de la dérivée f' de f .

Corrigé :

Soit $f(x) = \sqrt{5x - 10}$. Pour déterminer la dérivée de f , nous appliquons la formule. Il vient alors que : $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x - 10}}$

Exercice 7

► Les dérivées des fonctions composées de la forme $x \mapsto \sqrt{ax + b}$.

1 Soit f une fonction dérivable sur $] -2; +\infty[$ et définie par $f(x) = \sqrt{3x + 6}$. Calculer la dérivée de la fonction f .

2 Soit f une fonction dérivable sur $\left]-\frac{2}{7}; +\infty\right[$ et définie par $f(x) = 5\sqrt{7x + 2}$. Calculer la dérivée de la fonction f .

Solution vidéo ↓



6 Dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto (ax + b)^n$ **Définition 1.18**

- Soit la fonction puissance de n dérivable sur un intervalle I et soit J un intervalle tel que, pour tout réel x de J , $ax + b$ appartient à I .
- Ainsi : $((ax + b)^n)' = a \times n \times (ax + b)^{n-1}$
-

Exemple 11

Soit f la fonction dérivable sur $] -\infty; +\infty[$ et définie par $f(x) = (3x + 9)^6$. Déterminer l'expression de la dérivée f' de f .

Corrigé :

Soit $f(x) = (3x + 9)^6$. Pour déterminer la dérivée de f , nous appliquons la formule. Il vient alors que :

$$f'(x) = 6 \times 3 \times (3x + 9)^{6-1}$$

$$f'(x) = 18(3x + 9)^5$$

Exercice 8

Les dérivées des fonctions composées de la forme $x \mapsto (ax + b)^n$.

Pour les fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, calculer la fonction dérivée :

1 $f(x) = (4x + 2)^7$

2 $f(x) = 2(3x - 1)^5$

Solution vidéo ↓

**Exercice 9**

Déterminer une équation de la tangente T au point d'abscisse a .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

- 1** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2 .

Solution vidéo ↓



IV usuelles

Récapitulatif des dérivées des fonctions

Fonction	Domaine définition	Dérivée	Domaine dérivabilité
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{ax+b}$	$ax+b \geq 0$	$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$ax+b > 0$
$f(x) = (ax+b)^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a \times n \times (ax+b)^{n-1}$	$\mathbb{R}$