Premières notions sur les suites numériques



Jai20enMaths

Généralités

Définition 1.1 On appelle suite numérique, toute fonction de N dans R,
définie à partir d'un certain rang.
La suite u : N → R est notée (u_n).
On note u_n l'image de l'entier naturel n .
On dit que u_n est le terme général de la suite (u_n), le terme de rang (ou d'indice) n.





Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 4n - 5$ Le terme d'indice 3 est $u_3 = 4 \times 3 - 5 = 7$, le terme d'indice 8 est $u_8 = 4 \times 8 - 5 = 27$.

Modes de générations d'une suite

- Suite définie par une relation explicite
 - Définition 1.2 Une suite (u_n) est définie par une formule explicite lorsque u_n s'exprime directement en fonction de n. Dans ce cas, on peut calculer chaque terme à partir de son indice.
 Autrement dit, il existe une fonction f définie sur [0; +∞ [telle que, pour tout entier n, u_n = f(n).



Exemple



Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n + 3$.

 (u_n) est une suite définie par une formule explicite. En effet, u_n est exprimé en fonction

Soit la fonction f telle que $f: x \mapsto 2x + 3$ définie sur $[0; +\infty[$ et, pour tout entier $n, u_n = f(n).$

Suite définie par une relation de récurrence

Définition 1.3 Une suite (u_n) est définie par une formule de récurrence lorsque que chaque terme de la suite s'obtient à partir du terme précédent. Nous pourrons ainsi exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . Le premier terme de la série sera toujours donné.

Exemple



Les suites ci desous sont toutes des suites définies par une relation de récurrence.

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= 2u_n + 7 \\ u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{3u_n}{5 + u_n} \end{cases}$$

3

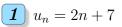
Exercice

PREMIÈRES NOTIONS SUR



Reconnaitre si une suite est sous forme explicite ou sous forme récurrente.

Soit n un entier naturel. Indiquer si les suites (u_n) , ci-dessous, sont définies par une formule explicite ou bien par récurrence.



$$\boxed{4} \ u_n = \frac{n+4}{2n-7}$$

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 + 2u_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5n + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5n + 7 \end{cases}$$



Calculer les termes d'une suite définie par une relation explicite

Définition 1.4 Pour calculer un terme d'une suite définie avec une formule explicite, il suffit de remplacer par l'indice souhaité pour obtenir le terme correspondant.



Exemple



Soit n un entier naturel.

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 4n - 5$.

Calculer u_0 ; u_1 et u_2 .

Corrigé:

$$u_0 = 4 \times 0 - 5 = -5$$

$$u_1 = 4 \times 1 - 5 = -1$$

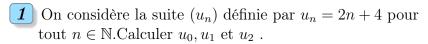
$$u_2 = 4 \times 2 - 5 = 3$$





Calculer les termes d'une suite explicite.

Solution vidéo ↓





2 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n) .

Calculer les termes Suite définie par une relation de récurrence

Définition 1.5 La relation de récurrence permet de calculer chaque terme à partir du précédent.





Soit n un entier naturel.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$

Calculer u_1 et u_2 .

Corrigé:

$$u_{0+1} = 2u_0 - 1$$
 d'où $u_1 = 2 \times 3 - 1 = 5$

$$u_{1+1} = 2u_1 - 1$$
 d'où $u_2 = 2 \times 5 - 1 = 9$

$$u_{2+1} = 2u_2 - 1$$
 d'où $u_3 = 2 \times 9 - 1 = 17$





Calculer les termes d'une suite définie par récurrence.

Solution vidéo \downarrow

1 On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 6 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_1 et u_2 .



On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n - 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer les deux premiers termes de la suite (u_n) .

Définitions et Variations d'une suite

- 1 Suite décroissante
 - **Définition 1.6** La suite (u_n) est décroissante (à partir du rang n_0), lorsque \vdots pour tout entier $n \ge n_0 : u_{n+1} u_n \le 0$ autrement dit $u_{n+1} \le u_n$
- 2 Suite croissante
 - **Définition 1.7** La suite (u_n) est croissante (à partir du rang n_0), lorsque pour tout entier $n \ge n_0$: $u_{n+1} u_n \ge 0$ autrement dit $u_{n+1} \ge u_n$
- 3 Suite monotone
 - **Définition 1.8** La suite (u_n) est monotone (à partir du rang n_0) lorsqu'elle est croissante ou décroissante à partir du rang n_0 .
- 4 Suite constante
 - **Définition 1.9** La suite (u_n) est constante lorsque $u_{n+1} = u_n$ pour tout entier n du domaine de définition de la suite (u_n) .







Méthodes permettant de déterminer le sens riation d'une suite

Méthode 1 : Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Définition 1.10

Si $u_{n+1} - u_n \ge 0$ alors la suite (u_n) est croissante.

Si $u_{n+1} - u_n \le 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemple



Etudier le sens de variation de la suite (u_n) , définie pour tout entier naturel n, par : $u_n = n^2 + 3$

Corrigé:

 $1^{\text{ère}}$ étape : Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

Comme $u_n = n^2 + 3$ alors:

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + 3$$

 $u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 3$

$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 4$$

 $\mathbf{2}^{\text{ème}}$ étape : Calcul de $u_{n+1}-u_n$ puis étude du signe de $u_{n+1}-u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 4 - (n^2 + 3)$$

$$u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 4 - n^2 - 3$$

$$u_{n+1} - u_n = 2n + 1$$

Ici, $u_{n+1} - u_n$ dépend de n, il faut donc étudier le signe de 2n + 1.

Comme n un entier naturel alors $n \ge 0$ donc $2n \ge 0$ ainsi $2n + 1 \ge 1$.

II en résulte que $2n+1 \ge 0$

Or $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$ donc $u_{n+1} - u_n \ge 0$ alors la suite (u_n) est croissante.



Solution vidéo ↓

1 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -3n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) que l'on peut également énoncer étudier la monotonie de la suite (u_n)



- **2** On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 4n 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) que l'on peut également énoncer étudier la monotonie de la suite (u_n) .
- 3 On considère la suite $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n \sqrt{n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) que l'on peut également énoncer étudier la monotonie de la suite (u_n) .
- On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) que l'on peut également énoncer étudier la monotonie de la suite (u_n) .
- Méthode 2 : Comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
 - **D**éfinition 1.11

Il faut que tous les termes de la suite soient strictement positifs.

Si $\frac{u_{n+1}}{n} \ge 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.





Etudier le sens de variation de la suite (u_n) , définie pour tout entier naturel n non nul, $par u_n = \frac{2^n}{n}$

Corrigé:

 $1^{\text{ère}}$ étape : Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

Comme $u_n = \frac{2^n}{n}$ alors:

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$$



 $\mathbf{2}^{\text{ème}}$ étape : Calcul de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ puis comparer de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 .

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n \times 2}{n+1} \times \frac{n}{2^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+n}{n+1}$$

Pour tout réel n non nul, on peut écrire que n > 1 et donc n + n > 1 + n et ainsi :

Pour tout rec
$$\frac{n+n}{n+1} > 1$$
Or
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$$

Pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) est croissante.

1 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2 \times 5^n$ pour tout

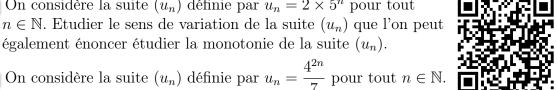
également énoncer étudier la monotonie de la suite (u_n) .

Exercice





Solution vidéo ↓



2 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{4^{2n}}{7}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) que l'on peut également énoncer étudier la monotonie de la suite (u_n) .