

# Premières notions sur les suites numériques



Jai20enMaths

## I Généralités

**Définition 1.1** On appelle suite numérique, toute fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  
définie à partir d'un certain rang.  
La suite  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  est notée  $(u_n)$ .  
On note  $u_n$  l'image de l'entier naturel  $n$ .  
On dit que  $u_n$  est le terme général de la suite  $(u_n)$ , le terme de rang (ou d'indice)  $n$ .

Exemple 1



Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $u_n = 4n - 5$   
Le terme d'indice 3 est  $u_3 = 4 \times 3 - 5 = 7$ , le terme d'indice 8 est  $u_8 = 4 \times 8 - 5 = 27$ .

## II Modes de générations d'une suite

### 1 Suite définie par une relation explicite

**Définition 1.2** Une suite  $(u_n)$  est définie par une formule explicite lorsque  
•  $u_n$  s'exprime directement en fonction de  $n$ . Dans ce cas, on peut calculer chaque terme à partir de son indice.  
• Autrement dit, il existe une fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  telle que, pour tout  
• entier  $n$ ,  $u_n = f(n)$ .

## Exemple 2



Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = 2n + 3$ .

$(u_n)$  est une suite définie par une formule explicite. En effet,  $u_n$  est exprimé en fonction de  $n$ .

Soit la fonction  $f$  telle que  $f : x \mapsto 2x + 3$  définie sur  $[0; +\infty[$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_n = f(n)$ .

## 2 Suite définie par une relation de récurrence

**Définition 1.3** Une suite  $(u_n)$  est définie par une formule de récurrence lorsque :

- que chaque terme de la suite s'obtient à partir du terme précédent. Nous pourrions
- ainsi exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ . Le premier terme de la série sera toujours
- donné.

## Exemple 3



Les suites ci dessous sont toutes des suites définies par une relation de récurrence.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 7 \end{cases} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{5 + u_n} \end{cases}$$

## Exercice 1



Reconnaitre si une suite est sous forme explicite ou sous forme récurrente .

Soit  $n$  un entier naturel. Indiquer si les suites  $(u_n)$ , ci-dessous, sont définies par une formule explicite ou bien par récurrence.

1  $u_n = 2n + 7$

2  $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 3u_n + 7 \end{cases}$

3  $u_n = -\frac{1}{2}n^2 + \sqrt{n}$

4  $u_n = \frac{n+4}{2n-7}$

5  $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 + 2u_n \end{cases}$

6  $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5n + 7 \end{cases}$

7  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Solution vidéo ↓



### 3 Calculer les termes d'une suite définie par une relation explicite

**Définition 1.4** Pour calculer un terme d'une suite définie avec une formule explicite, il suffit de remplacer par l'indice souhaité pour obtenir le terme correspondant.

Exemple 4

Soit  $n$  un entier naturel.

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = 4n - 5$ .

Calculer  $u_0$ ;  $u_1$  et  $u_2$ .

**Corrigé :**

$$u_0 = 4 \times 0 - 5 = -5$$

$$u_1 = 4 \times 1 - 5 = -1$$

$$u_2 = 4 \times 2 - 5 = 3$$

Exercice 2

Calculer les termes d'une suite explicite.

Solution vidéo ↓

**1** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 2n + 4$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$ .

**2** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer les trois premiers termes de la suite  $(u_n)$ .



### 4 Calculer les termes Suite définie par une relation de récurrence

**Définition 1.5** La relation de récurrence permet de calculer chaque terme à partir du précédent.

Exemple 5

Soit  $n$  un entier naturel.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$

Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

**Corrigé :**

$$u_{0+1} = 2u_0 - 1 \text{ d'où } u_1 = 2 \times 3 - 1 = 5$$

$$u_{1+1} = 2u_1 - 1 \text{ d'où } u_2 = 2 \times 5 - 1 = 9$$

$$u_{2+1} = 2u_2 - 1 \text{ d'où } u_3 = 2 \times 9 - 1 = 17$$

Solution vidéo ↓



- 1** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 6 \end{cases}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
- 2** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n - 1 \end{cases}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer les deux premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

## III

## Définitions et Variations d'une suite

**1** Suite décroissante

**Définition 1.6** La suite  $(u_n)$  est décroissante (à partir du rang  $n_0$ ), lorsque :

- pour tout entier  $n \geq n_0 : u_{n+1} - u_n \leq 0$  autrement dit  $u_{n+1} \leq u_n$

**2** Suite croissante

**Définition 1.7** La suite  $(u_n)$  est croissante (à partir du rang  $n_0$ ), lorsque pour :

- tout entier  $n \geq n_0 : u_{n+1} - u_n \geq 0$  autrement dit  $u_{n+1} \geq u_n$

**3** Suite monotone

**Définition 1.8** La suite  $(u_n)$  est monotone (à partir du rang  $n_0$ ) lorsqu'elle :

- est croissante ou décroissante à partir du rang  $n_0$ .

**4** Suite constante

**Définition 1.9** La suite  $(u_n)$  est constante lorsque  $u_{n+1} = u_n$  pour tout entier :

- $n$  du domaine de définition de la suite  $(u_n)$ .

## IV Méthodes permettant de déterminer le sens de variation d'une suite

### 1 Méthode 1 : Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ .

#### Définition 1.10

- Si  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  alors la suite  $(u_n)$  est croissante.
- Si  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  alors la suite  $(u_n)$  est décroissante.

#### Exemple

6

Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ , définie pour tout entier naturel  $n$ , par :  
 $u_n = n^2 + 3$

**Corrigé :**

1<sup>ère</sup> étape : Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $n$ .

Comme  $u_n = n^2 + 3$  alors :

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + 3$$

$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 3$$

$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 4$$

2<sup>ème</sup> étape : Calcul de  $u_{n+1} - u_n$  puis étude du signe de  $u_{n+1} - u_n$ .

$$u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 4 - (n^2 + 3)$$

$$u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 4 - n^2 - 3$$

$$u_{n+1} - u_n = 2n + 1$$

Ici,  $u_{n+1} - u_n$  dépend de  $n$ , il faut donc étudier le signe de  $2n + 1$ .

Comme  $n$  un entier naturel alors  $n \geq 0$  donc  $2n \geq 0$  ainsi  $2n + 1 \geq 1$ .

Il en résulte que  $2n + 1 \geq 0$

Or  $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$  donc  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  alors la suite  $(u_n)$  est croissante.

Solution vidéo ↓



- 1 On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = -3n + 4$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$  que l'on peut également énoncer étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
- 2 On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 4n - 6$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$  que l'on peut également énoncer étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
- 3 On considère la suite  $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - \sqrt{n} \end{cases}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$  que l'on peut également énoncer étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
- 4 On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = n^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$  que l'on peut également énoncer étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

## 2 Méthode 2 : Comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

### Définition 1.11

- Il faut que tous les termes de la suite soient strictement positifs.
- Si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$  alors la suite  $(u_n)$  est croissante.
- Si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$  alors la suite  $(u_n)$  est décroissante.
- 

### Exemple

7

Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ , définie pour tout entier naturel  $n$  non nul, par  $u_n = \frac{2^n}{n}$

**Corrigé :**

1<sup>ère</sup> étape : Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $n$ .

Comme  $u_n = \frac{2^n}{n}$  alors :

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

2<sup>ème</sup> étape : Calcul de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  puis comparer de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1 .

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{n+1}}{\frac{n+1}{2^n}} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^n \times 2}{n+1} \times \frac{n}{2^n} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2n}{n+1} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{n+n}{n+1}\end{aligned}$$

Pour tout réel  $n$  non nul, on peut écrire que  $n > 1$  et donc  $n + n > 1 + n$  et ainsi :

$$\frac{n+n}{n+1} > 1$$

$$\text{Or } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$$

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, la suite  $(u_n)$  est croissante.

Exercice

5



Solution vidéo ↓

**1** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 2 \times 5^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$  que l'on peut également énoncer étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

**2** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{4^{2n}}{7}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$  que l'on peut également énoncer étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

