

Dérivation globale

Applications de la dérivation



Jai20enMaths

I Variations d'une fonction

1 Lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée

Définition 1.1

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .
- Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I .
- Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I .
-

2 Étudier les variations d'une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$

Exemple 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 + 10x - 2$.

1. Déterminer l'expression de la dérivée f' de f .
2. Étudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x et en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé :

1.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme du second degré.

On a : $f'(x) = 10x + 10$

2.

Ici la dérivée est une fonction du premier degré.

Pour étudier son signe, nous allons résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$.

En effet, en résolvant $f'(x) \geq 0$, on déterminera ainsi l'intervalle sur lequel la dérivée est positive ou nulle.

Il vient alors que :

$f'(x) \geq 0$ équivaut successivement à

$10x + 10 \geq 0$

2

$$10x \geq -10$$

$$x \geq \frac{-10}{10}$$

$$x \geq -1$$

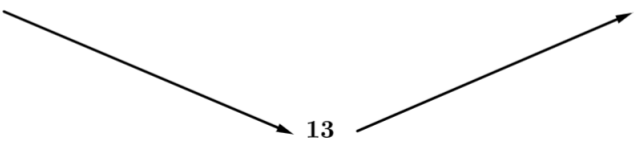
Cela signifie que l'on va mettre le signe + dans la ligne de $10x + 10$ lorsque x sera supérieur ou égale à -1 .

Il en résulte donc que :

si $x \in]-\infty; -1]$ alors $f'(x) \leq 0$ et donc f est décroissante sur cet intervalle.

si $x \in [-1; +\infty[$ alors $f'(x) \geq 0$ et donc f est croissante sur cet intervalle.

Nous traduisons toutes ces informations dans le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variation de f			

Exercice 1

Étudier les variations d'une fonction de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 12x - 4$.

- 1 Déterminer l'expression de la dérivée f' de f .
- 2 Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x .
- 3 En déduire le tableau de variation de f .

Solution vidéo ↓



Exercice 2

Étudier les variations d'une fonction de la forme $x \mapsto (ax + b)(cx + d)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-4x + 2)(2x - 5)$.

- 1 Déterminer l'expression de la dérivée f' de f .
- 2 Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x .
- 3 En déduire le tableau de variation de f .

Solution vidéo ↓



3 Étudier les variations d'une fonction de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Exemple 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 - 5x + 8$.

1. Déterminer l'expression de la dérivée f' de f .
2. Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x et en déduire le tableau de variation de f .

sur $\mathbb{R}$.

Corrigé :

1.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme du second degré.

On a : $f'(x) = -6x^2 - 5$

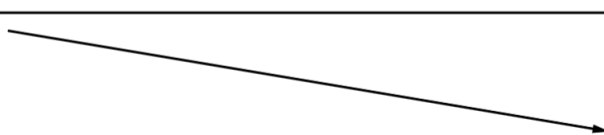
2.

Pour tout réel x , on sait que $x^2 \geq 0$ ainsi $-6x^2 \leq 0$.

Il vient alors que : $-6x^2 - 5 \leq -5$.

Il en résulte donc que, pour tout réel x , on a : $f'(x) < 0$.

Si $x \in]-\infty; +\infty[$ alors $f'(x) < 0$ et donc f est strictement décroissante sur cet intervalle.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	—	
Variation de f		

Exercice

3



Étudier les variations d'une fonction de la forme $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.

1 Déterminer l'expression de la dérivée f' de f .

2 Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x .

3 En déduire le tableau de variation de f .

Solution vidéo ↓



4 Étudier les variations d'une fonction de la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Exemple

3



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ par $f(x) = \frac{5x-1}{2x+6}$.

1. Déterminer l'expression de la dérivée f' de f .

2. Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x et en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R} - \{-3\}$.

Corrigé :

1.

f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ (on enlève la valeur interdite).

On reconnaît la forme $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 5x - 1$ et $v(x) = 2x + 6$

Ainsi : $u'(x) = 5$ et $v'(x) = 2$.

4

Il vient alors que

$$f'(x) = \frac{5 \times (2x + 6) - (5x - 1) \times (2)}{(2x + 6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{10x + 30 - (10x - 2)}{(2x + 6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{10x + 30 - 10x + 2}{(2x + 6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{32}{(2x + 6)^2}$$

2.

Pour tout réel $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$ on vérifie aisément que $32 > 0$ et également que $(2x + 6)^2 > 0$.

Si $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$ alors $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty; -3[$ et également strictement croissante sur l'intervalle $] -3; +\infty[$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
<i>Signe de $f'(x)$</i>	+		+
<i>Variation de f</i>			

Exercice 4



Étudier les variations d'une fonction de la forme $x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$.

Solution vidéo ↓

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x + 5}{x - 2}$.



1 Déterminer l'expression de la dérivée f' de f .

2 Étudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x .

3 En déduire le tableau de variation de f .



Extremum d'une fonction

Définition 1.2

- Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un réel de l'intervalle I où x_0 n'est pas une borne de l'intervalle I .
- Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f .

x	a	x_0	b
Signe de $f'(x)$	—	0	+
Variation de f			

x	a	x_0	b
Signe de $f'(x)$	+	0	—
Variation de f			

Exemple

4



Dans l'exemple 1, nous avons déterminé le tableau de variation de f ci dessous.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	—	0	+
Variation de f			

Nous observons que ici que f' s'annule en -1 en changeant de signe, alors $f(-1) = 13$ est un extremum local de f .

13 correspond précisément ici à un minimum local sur $\mathbb{R}$.

Des exercices supplémentaires rien que pour vous !)

Exercice 5



Étudier les variations . Pour s'exercer encore plus.

Solution vidéo ↓



- 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 1$.
Etudier les variations de la fonction f .
- 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 4)(5x - 2)$.
Etudier les variations de la fonction f .
- 3 Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty; \frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$ par
 $f(x) = \frac{-4x + 1}{2x - 5}$. Etudier les variations de la fonction f .
- 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 9x - 3$. Etudier les variations de la fonction f .

Exercice 6



Exercice type devoir .

Solution vidéo ↓



Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x + 5}{x - 2}$
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-2; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$$

et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-2; +\infty[$.

- 1 Étudier le signe de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + 4x + 3$.
- 2 Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{P(x)}{(x + 2)^2}$$

où f' est la fonction dérivée de f .

- 3 Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-2; +\infty[$ et construire le tableau de variations de la fonction f sur $]-2; +\infty[$.
- 4 Donner le minimum de la fonction f sur $]-2; +\infty[$ et la valeur pour laquelle il est atteint (on donnera les valeurs exactes).
- 5 Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 2.