Séries à termes positives (**Séries de Riemann ; Séries de Bertrand ; Règle de d'Alembert ; Règle de Raabe & Duhamel ; Règle de Cauchy**)

Séries à termes positifs

■ Techniques de comparaison

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs.

La propriété fondamentale qui permet d'étudier la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est la croissance de la suite des

sommes partielles, notée $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⊤ Théorème :

Une série à terme positifs est convergente si la suite de ses sommes partielles est bornée.

Pour invoquer l'usage de ce théorème, il faut impérativement que les termes de la série étudiée

soient positifs. L'exemple de $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ illustre cette nécessité. En effet cette série est bornée

par 1 et -1, ainsi que ses sommes partielles, mais elle ne converge pas.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n$.

Dans ces conditions :

- Si la série de terme général a_n diverge alors la série de terme général b_n diverge également.

- Si la série de terme général b_n converge alors la série de terme général a_n converge

également.
Ces résultats sont également vérifiées si la convergence se réalise à partir d'un certain rang.

■■ Séries de termes généraux équivalents

⊤ **Théorème :** *Si les suites de nombres réels* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

sont équivalentes alors les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *sont de même nature.*

Ce qui est important dans ce théorème c'est que les termes soient toujours de même signe.

⊤ **Théorème :** *Si les deux suites de nombres réels* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont telles que*

$a_n = o(b_n)$ *et si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *est de nature convergente, alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

est elle aussi de nature convergente.

■■■ Comparaison avec une série de Riemann

► Le critène $n^{\alpha}a_n$

On a ale théorème suivant :

⊤ **Théorème :** *On considère la série à terme positifs* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

On suppose qu'il existe un nombre réel α *tel que* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} n^{\alpha}a_n = \ell \in \mathbb{R}$. *Dans ce cas :*

- *Si* $\alpha > 1$ *alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *est de nature convergente.*

- *Si* $\alpha \leqslant 1$ et $\ell > 0$ *alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *est de nature divergente.*

■■■■ Les séries de Bertrand

Une série de $Bertrand$ (Joseph Bertrand, 1822 - 1900) est une série dont le terme général est

de la forme $\dfrac{1}{n^{\alpha}\left(\ln(n)\right)^{\beta}}$, avec $n \geqslant 2$ et les nombres α et β sont deux réels. Dans ces conditions

:

- si $\alpha = 1$ et si $\beta > 1$ alors cette série converge.

- si $\alpha > 1$ alors cette série converge.

- dans tous les autres cas cette série diverge.

Les séries de $Bertrand$ sont, très souvent, des séries de références. On détermine la nature d'une série en montrant qu'elle est équivalente, majorée ou minorée par une série de $Bertrand$.

■■■■■ Règles classiques

► Comparaison avec une série géométrique

Soient les deux suites de nombres réels strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que, à partir d'un certain rang n, on a l'inégalité $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Dans ce cas :

- si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge également.

- si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge également.

On a également la **proposition** suivante :

Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *une série à terme positifs et* $k \in [0\,;\,1[$. *On suppose que,* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant k$.

Dans ce cas la série converge.

► Règle de d'Alembert

Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série dont les termes a_n sont tous des nombres réels strictement positifs. On

suppose que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\ell\in\mathbb{R}^+$

- Si $0\leqslant\ell<1$ alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ est convergente.

- Si $\ell>1$ alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ est divergente.

- Si $\ell=1$ alors on ne peut pas conclure.

► Règle de Raabe & Duhamel

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite dont les termes a_n sont tous des nombres réels strictement positifs. On

suppose qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1-\dfrac{\lambda}{n}+v_n$

Dans cette relation, le terme v_n est le terme général d'une série absolument convergente.

Si $\lambda>1$ alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ est convergente. Dans les autre cas, la série série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ est

divergente.

► Règle de Cauchy

Soit $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ une série dont les termes a_n sont tous des nombres réels positifs. On suppose que

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell\in\mathbb{R}^+$

- Si $0\leqslant\ell<1$ alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ est convergente.

- Si $\ell > 1$ alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est divergente.

- Si $\ell = 1$ alors on ne peut pas conclure.