Séries numériques et généralités

► Séries numériques et généralités

On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent des scalaires.

■ Définitions

On note par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

On appelle **série** de terme général a_n , le couple de suites $\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,;\,(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ où $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$.

La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la suite des somme partielles de la série de terme général a_n.

On dit que la série converge sui la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.

Lorsque la série converge la quantité $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} s_n$ s'appelle la somme de cette série, et se note :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

– Bien souvent, pour des raisons de simplifications, on note $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ la série de terme général a_i sans savoir si elle converge ou non. Conformément à cet usage, nous utiliserons cette notation.

– Comme pour les suites, il est possible de modifier la définition d'une série en considérant des sommes du type $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ avec $n_0 \in \mathbb{N}^\star$.

Si une série $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ converge alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, la série $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$ converge également, et on a alors

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} R_n = 0.$

La série R_n s'appelle le reste d'ordre n de la série $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$.

■■ Somme de séries

Soient $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries de nombres réels ou complexes. On désigne par λ un scalaire.

On appelle somme des séries $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$

Si les deux séries $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ sont convergentes alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ est également convergente on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$$

■■■ Produit de série par un scalaire

Soit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ une série de nombres réels ou complexes. On désigne par λ un scalaire.

On appelle produit de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ par le scalaire λ la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)$

Si la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)$ est également convergente on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

■■■■ Théorème sur la convergence d'une série et la convergence d'une intégrale

Soit a un nombre entier naturel. Soit $f : [a\,;\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique continue, positive et décroissante. Dans ce cas, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ et la série $\sum_{n=a}^{+\infty} f(n)$ sont de même nature.

Ceci nous permet d'obtenir le théorème suivant relatif aux séries de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

■■■■■ Théorème sur la convergence des séries de Riemann

La série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

■■■■■■ Le critère de Cauchy

Ce critère donne une condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série de termes réels ou complexes, sans qu'on en connaise sa limite. Il s'énonce ainsi :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ une série de nombres réels ou complexes. Cette série converge si et seulement si elle satisfait à l'assertion suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ p \geqslant N,\ q \geqslant p \Longrightarrow \left| \sum_{i=p}^{q} a_i \right| < \varepsilon$$

Les nombres réels ou complexes $\sum_{i=p}^{q} a_i$ sont appelés les $tranches\,de\,Cauchy$ de la série.

On a alors le **corollaire** suivant : le terme général d'une série convergente tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

■■■■■■■ Convergence abolue

► Définition

On dit que la série de terme général a_n est absolument convergente si la série de terme général

$|a_n|$ converge.

De fait, **toute série absolument convergente est convergente**.

La réciproque de ce résultat est fausse. Il suffit de considérer le cas de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ qui converge alors que la série (dite harmonique) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ qui diverge.

Série géométrique

▶ Définition

Soit r un nombre complexe. La série géométrique de raison r est la série $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$

▶ Théorème

La série géométrique de raison r converge si et seulement si $|r| < 1$. Dans ce cas sa somme vaut $\frac{1}{1-r}$.

Série semi-convergente

Une série de terme général a_n est dite **semi-convergente** si la série converge mais ne converge pas absolument : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge mais $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ diverge.