Sommes de sous espaces vectoriels

♣ Généralités

On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On désigne par V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Les ensembles E et F désignent deux sous-espaces vectoriels de V. On pose :

$$E+F=\{u+v \mid (u\,;\,v)\in E\times F\}$$

Evidemment $E+F$ est un sous espace vectoriel de V.

▶ Définitions

Le sous espace vectoriel $E+F$ s'appelle la somme des sous-espaces vectoriels

E et F.

On dit que la somme $E+F$ est **directe** si $E\cap F=0_V$. Dans ce cas et

uniquement dans ce cas on note ceci par l'écriture $E\oplus F$.

▶ Conséquences

Les propositions suivantes sont équivalente :

1 – la somme $E+F$ est directe ;

2 – pour tout x appartenant à la somme $E+F$, il existe **un unique couple**

$(u\,;\,v)\in E\times F$ tel que $x=u+v$.

↬ Par exemple si $E=(x\,;\,0\quad 0)$ avec $x\in\mathbb{R}$ qui est un sous espace vectoriel de

$\mathbb{R}^3$ et $F = (0\,;\,y\;\;z)$ avec $(y\,;\,z) \in \mathbb{R}^2$ qui est un aussi sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

alors on a clairement $E + F = (x\,;\,y\;\;z)$ avec $(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathbb{R}^3$, donc $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

♣ Cas de la dimension finie

► Résultat important

Soient p et q deux nombres entiers naturels non nuls. On suppose que :

- E est engendré par les p vecteurs $u_1\,;\cdots;\,u_p$ de V ;
- F est engendré par les q vecteurs $u_{p+1}\,;\cdots;\,u_{p+q}$ de V ;

Dans ce cas la somme $E + F$ est engendrée par les vecteurs

$u_1\,;\cdots;\,u_p\;;\;u_{p+1}\,;\cdots;\,u_{p+q}$.

► Théorème

On supposse que $\dim V = n \geqslant 2$. On suppose également que le sous-espace vectoriel E, de V, est munie d'une base $(e_1\,;\cdots;\,e_p)$ et que le sous-espace vectoriel F, de V, est munie d'une base $(e_{p+1}\,;\cdots;\,e_{p+q})$. Alors les énoncés suivants sont parfaitement équivalents :

1 – les sous-espaces vectoriels E et F sont supplémentaires dans V.

2 – la famille $(e_1\,;\cdots;\,e_p\,;\,e_{p+1}\,;\cdots;\,e_{p+q})$ est une base de V.

3 – on a $\left\{\begin{array}{rcl} E \cap F & = & 0_V \\ \dim E + \dim F & = & \dim V \end{array}\right.$

► Conséquence

Si l'espace vectoriel V est de dimension finie alors tout sous-espace vectoriel E, de V, possède au moins un supplémentaire.

► Méthode

Pour déterminer un supplémentaire F d'un sous-espace vectoriel E d'un espace vectoriel V de dimension finie non nulle, on procède de la manière suivante :

◁ Etape 1

On cherche une base $(e_1 \,;\, \cdots \,;\, e_p)$ de E.

◁ Etape 2

On complète la base $(e_1 \,;\, \cdots \,;\, e_p)$ de E par des vecteurs $(e_{p+1} \,;\, \cdots \,;\, e_{p+q})$ de V de façon à obtenir une base $(e_1 \,;\, \cdots \,;\, e_p \,;\, e_{p+1} \,;\, \cdots \,;\, e_{p+q})$ de V.

◁ Etape 3 : conclusion

le sous-espace vectoriel F engendré par $e_{p+1} \,;\, \cdots \,;\, e_{p+q}$ est un supplémentaire de E dans V.

► Remarque

Si E est un sous-espace vectoriel de V différent de $\{0_V\}$ et de V alors il n'y a pas unicité d'un supplémentaire de E dans V. Le sous-espace vectoriel E admet une infinité de supplémentaires.

► Exemple classique

On considère, dans $\mathbb{R}^2$, les droites vectorielles :

$\mathcal{D}_1 = \left\{(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\right\}$ dont un vecteur directeur est $e_1 = (1\,;\,2)$;

et

$\mathcal{D}_2 = \left\{(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 6y = 0\right\}$ dont un vecteur directeur est $e_2 = (-6\,;\,3)$

Ces deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont supplémentaires de la droite

$\mathcal{D}_3 = \left\{(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\right\}$ dont un vecteur directeur est $e_3 = (1\,;\,1)$. En

effet, les ensembles $(e_1\,;\,e_3)$ et $(e_2\,;\,e_3)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$. Et de fait on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_3 & = & \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_3 & = & \mathbb{R}^2 \end{array}\right.$$

► Théorème de Grassmann

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de

dimensions finies dans V. Dans ce cas la somme $E + F$ est de dimension finie et

on a :

$$\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$$

► Généralisation

On dit que les trois sous-espaces vectoriels E_1, E_2 et E_3 de V sont en somme

directe si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} E_1 \cap (E_2 + E_3) & = & 0_V \\ E_2 \cap (E_1 + E_3) & = & 0_V \\ E_3 \cap (E_1 + E_2) & = & 0_V \end{array}\right.$$

On écrit alors cette somme comme $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ et on dit que V est la somme

directe des trois sous-espaces vectoriels E_1, E_2 et E_3 : $V = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$

Ceci se généralise au cas de i sous-espaces vectoriels. On dit que les k sous-

espaces vectoriels $E_1,\ E_2,\ \cdots, E_k$ de V sont en somme directe si :

$$\forall i \in (1\,;\cdots;\,k),\ E_i \cap \left(\sum_{j=1\,;\,j\neq i}^{k} E_j\right) = 0_V$$

Et on écrira :

$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} E_j$$

► Retour sur l'exemple classique

On considère, dans $\mathbb{R}^2$, les droites vectorielles :

$\mathcal{D}_1 = \left\{(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\right\}$ dont un vecteur directeur est $e_1 = (1\,;\,2)$;

et

$\mathcal{D}_2 = \left\{(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 6y = 0\right\}$ dont un vecteur directeur est $e_2 = (-6\,;\,3)$

Ces deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont supplémentaires de la droite

$\mathcal{D}_3 = \left\{(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\right\}$ dont un vecteur directeur est $e_3 = (1\,;\,1)$. En

effet, les ensembles $(e_1\,;\,e_3)$ et $(e_2\,;\,e_3)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$. Et de fait on a :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_3 &= \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_3 &= \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Mais on a aussi :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 &= 0_{\mathbb{R}^2} \\ \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3 &= 0_{\mathbb{R}^2} \\ \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 &= 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$$

Mais pour autant on a $(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2) \cap \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_3 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$.

Il faut toujours prendre le temps de vérifier l'ensemble des conditions !