Dimension finie

♣ 1 – Famille génératrice

► 1 – Définition : combinaison linéaire

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soient $v_{i\in\{1\,;\cdots;n\}}$ des vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel V. On dit qu'un vecteur $u \in V$ est une combinaison linéaire des $v_{i\in\{1\,;\cdots;n\}}$ s'il existe n scalaires $\lambda_{i\in\{1\,;\cdots;n\}}$ de $\mathbb{K}$ tels que :

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

► 2 – Définition : ensemble des combinaisons linéaires

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A = \{u_{i\in\{1\,;\cdots;n\}}\}$ une partie de V. On note par $\mathrm{Vect}(A)$ ou $\mathrm{Vect}(u_1\,;\cdots;\,u_n)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles à partir des vecteurs $\{u_{i\in\{1\,;\cdots;n\}}\}$. Donc :

$$\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(u_1\,;\cdots;\,u_n) = u \in V,\ \exists \lambda_{i\in\{1\,;\cdots;n\}} \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

L'ensemble $\mathrm{Vect}(A)$ ou $\mathrm{Vect}(u_1\,;\cdots;\,u_n)$ est un sous-espace vectoriel de V sur $\mathbb{K}$.

Par exemple si $q \in V$ alors $\mathrm{Vect}(q) = \lambda q$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

► 3 – Définition : famille génératrice

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soient $\mathcal{U} = u_{i\in\{1\,;\cdots;\,n\}} \in V^n$. On dit que $\mathcal{U}$ est une famille (vectorielle) génératrice (ou système générateur) de V si :

$\mathrm{Vect}(u_1\,;\cdots;\,u_n) = V$

On dit aussi que la famille vectorielle $\mathcal{U}$ engendre V.

► 4 – Définition : famille libre et famille liée

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soient $\mathcal{U} = u_{i\in\{1\,;\cdots;\,n\}} \in V^n$ une famille de vecteur de l'espace vectoriel V.

On dit que la famille $\mathcal{U}$ est **libre** ou que les vecteurs $u_{i\in\{1\,;\cdots;\,n\}}$ sont linéairement indépendants si :

$$\forall \lambda_{i\in\{1\,;\cdots;\,n\}} \in \mathbb{K}^n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0\right) \Longrightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0)$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si l'on peut trouver n scalaires $\lambda_{i\in\{1\,;\cdots;\,n\}}$ **non tous nuls** tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ on dit que la famille $\mathcal{U}$ est **liée** ou que les vecteurs $u_{i\in\{1\,;\cdots;\,n\}}$ sont linéairement dépendants. Ainsi il est possible d'exprimer l'un des vecteurs $u_{i\in\{1\,;\cdots;\,n\}}$ de $\mathcal{U}$ en fonction des $n-1$ autres vecteurs de cette même famille $\mathcal{U}$.

► 5 – Conséquence :

Au sein d'une famille vectorielle libre, aucun vecteur n'est nul.

Ainsi la famille $\mathcal{U} = (u)$ est libre si et seulement si u est non nul.

De plus, toute sous- famille vectorielle d'une famille vectorielle libre est également

libre.

♣ 2 – Base

► 1 – Définition : base

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soient $\mathcal{B} = \left(u_{i\in\{1\,;\,\cdots\,;\,n\}}\right) \in V^n$ une famille de vecteur de l'espace vectoriel V. On dit que $\mathcal{B}$ est une **base** de l'espace vectoriel V si $\mathcal{B}$ est, à la fois,

libre génératrice dans V.

Au sein d'un espace vectoriel, une base n'est pas unique !

► 2 – Premier exemple

Pour tout λ non nul, la famille (λ) est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$. En particulier, la famille (1) est une base de de $\mathbb{K}$ et on l'appelle la **base canonique**.

► 3 – Deuxième exemple

Plus généralement, les vecteurs de $\mathbb{K}^n$, notés $e_1 = (1\,;\,0\,;\,\cdots\,;\,0)$, $e_2 = (0\,;\,1\,;\,\cdots\,;\,0), \cdots, e_n = (0\,;\,0\,;\,\cdots\,;\,1)$ forment une base de $\mathbb{K}^n$ et on l'appelle la **base canonique**.

► 4 – Troisième exemple

Soit $i^2 = -1$. La famille $(1\,;\,i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. On l'appelle la **base canonique** de $\mathbb{C}$.

► 5 – Quatrième exemple

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ les quatre matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

forment une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ Il en est de même que

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière base s'appelle la **base canonique** de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

► 6 – Un résultat important

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soient $\mathcal{B} = u_{i\in\{1\,;\cdots;\,n\}} \in V^n$ une famille de vecteur de l'espace vectoriel V. Pour que $\mathcal{B}$ soit une base de V, il faut et il suffit que, pour tout vecteur v de V, il existe une seul et unique n-uplet $\lambda_{i\in\{1\,;\cdots;\,n\}}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Dans ce cas le n-uplet $\lambda_{i\in\{1\,;\cdots;\,n\}})$ s'appelle le système des composantes de v dans la base $\mathcal{B}$.

- Par exemple, on peut écrire que

$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 2E_{11} + (-3)E_{12} + 4E_{21} + 7E_{22}$. Donc, dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, les composantes de M sont 2, -3, 4 et 7.

♣ 3 – Théorie de la dimension finie

► 1 – Définition

On dit que l'espace vectoriel V est de dimension finie si V est engendré par un nombre fini de vecteurs. Dans le cas contraire, ont dit que V est de dimension

infinie.

● Par exemple, en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{M}_{n\,;p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie.

●● Par exemple, $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ est de dimension infinie.

► 2 – Lemme de Steiniz

Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Si V est engendrée par n vecteurs alors toutes famille formée de

$n+1$ vecteurs est liée.

↪ C'est souvent comme cela que l'on montre qu'une famille est liée.

► 3 – Théorème

On suppose que V est de dimension finie, non réduit au vecteur nul. Alors :

■ V possède au moins une base formée d'un nombre fini de vecteurs ;

■■ V toutes les bases de V sont formées d'un même nombre fini de vecteurs.

► 4 – Définition : la dimension

Soit V un espace vectoriel de dimension finie, non réduit à l'élément nul. Le cardinal

commun de toutes ses bases s'appelle **la dimension** de V et se note $\mathbf{dim}(V)$.

● Par exemple, une droite vectorielle est un espace vectorielle de dimension 1.

●● Par exemple, un plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension 2.

●●● Par exemple, un volume vectoriel est un espace vectoriel de dimension 3.

C'est la cadre de travail du physicien en Physique classique ;

●●●● Si V se réduit au vecteur nul alors on dit que la dimension de V est 0.

► 5 – Exemples classiques et importants

● $\mathbb{R}$ est une droite vectorielle sur $\mathbb{R}$.

●● $\mathbb{C}$ est une droite vectorielle sur $\mathbb{C}$.

●●● $\mathbb{C}$ est un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$.

●●●● $\mathcal{M}_{n\,;\,p}(\mathbb{K})$ est de dimension np.

► 6 – Produit d'espaces vectoriels de dimension finie

Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Soient V_1 ; V_2 ; $\cdots$; V_n des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Le produit $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et l'on a :

$$\dim(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n) = \dim(V_1) + \dim(V_2) + \cdots + \dim(V_n)$$

● Par exemple, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ de dimension n.

●● Par exemple, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ de dimension $2n$.

► 7 – Théorème

Si V est un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, alors :

$1-$ toute famille libre de V admet au plus n éléments ;

$2-$ une famille libre ayant exactement n éléments est une base. On l'appelle "famille libre maximale dans V" ;

$3-$ toute famille génératrice de V admet au moins n éléments ;

$2-$ une famille génératrice ayant exactement n éléments est une base. On l'appelle "famille génératrice minimale dans V".

► 8 – Théorème de la base incomplète

On suppose que V est de dimension $n \geqslant 2$. On considère une base $\mathcal{B} = \left(e_{i\in\{1\,;\cdots;\,n\}}\right)$ de V et une famille libre $\mathcal{L} = \left(\ell_{i\in\{1\,;\cdots;\,p\}}\right)$ de p vecteurs de V, avec $1 \leqslant p < n$. Dans ce cas, on peut compléter les p vecteurs de $\mathcal{L}$ par $n-p$ vecteurs $e_{k(1)}\,;\cdots;\,e_{k(n-p)}$ tous choisis dans la base $\mathcal{B}$, de sorte que la famille $\mathcal{C} = \left(\ell_1\,;\cdots\ell_p\,;\;;\,e_{k(1)}\,;\cdots;\,e_{k(n-p)}\right)$ soit une base de V.

► 9 – Théorème

Soit V un espace vectoriel de dimension finie et W un sous-espace vectoriel de V. On a alors :

$1-$ le sous-espace vectoriel W est de dimension finie ;

$2-$ on a $0 \leqslant \dim W \leqslant \dim V$;

$3-$ si $W = V$ alors $\dim W = \dim V$.

♣ 4 – Rang d'une famille de vecteurs

On désigne par V un espace vectoriel de dimension finie.

► 1 – Définition : le rang

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On désigne par $\mathcal{U} = (u_1\,;\cdots;\,u_n)$ une famille de n vecteurs de V. La dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathcal{U})$ s'appelle le **rang** de $\mathcal{U}$ et se note $\mathrm{rang}(\mathcal{U})$. Donc :

$$\mathrm{rang}(\mathcal{U}) = \dim \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$$

► 2 – Conséquences

Soit $p \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathcal{U} = (u_1 \,;\, \cdots \,;\, u_p)$ une famille de p vecteurs de V. On a alors :

$1-$ on a $0 \leqslant \operatorname{rang}(\mathcal{U}) \leqslant \min(p \,;\, \dim V)$;

$2-$ on a $\operatorname{rang}(\mathcal{U}) = p$ si et seulement si la famille $\mathcal{U}$ est libre dans V ;

$3-$ on a $\operatorname{rang}(\mathcal{U}) = \dim V$ si et seulement si la famille $\mathcal{U}$ engendre V.

► 3 – Lien avec la méthode du pivot de Gauss

Soit $p \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathcal{U} = (u_1 \,;\, \cdots \,;\, u_p)$ une famille de p vecteurs de V.

On ne modifie pas le sous-espace vectoriel engendré $\operatorname{Vect}(\mathcal{U})$ et donc le rang de la famille $\mathcal{U}$ lorsqu'on fait subir aux vecteurs $(u_1 \,;\, \cdots \,;\, u_p)$ les opérations élémentaires suivantes :

$1-$ changer l'ordre des vecteurs ;

$2-$ multiplier l'un des vecteur par un scalaire non nul ;

$3-$ ajouter à l'un des vecteurs de la famille $\mathcal{U}$) une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille \mathcal{U}) ;

$4-$ Substituer à la famille vectorielle $\mathcal{U} = (u_1 \,;\, \cdots \,;\, u_p)$ la famille $\mathcal{U}' = (u_1 \,;\, \cdots \,;\, u_p \,;\, v)$ dans laquelle le vecteur supplémentaire v est une combinaison linéaire des vecteurs $(u_1 \,;\, \cdots \,;\, u_p)$.

↬ Par exemple si $(u \,;\, v) \in V^2$ alors on a

$$\operatorname{rang}(u \,;\, v) = \operatorname{rang}(u \,;\, 5v) = \operatorname{rang}(3u \,;\, 4v) = \operatorname{rang}(2u \,;\, 6v \,;\, 5u + 7v).$$

♣ 5 – Action d'un changement de base

► 1 – Définition

Soit $\mathcal{B} = (e_1 \,;\, \cdots \,;\, e_n)$ une base de V.

$1-$ Soit u un vecteur de V de composantes $\lambda_1 \,;\, \cdots \,;\, \lambda_n$ dans la base $\mathcal{B}$. La matrice $\mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

$2-$ Soit $\mathcal{U} = (u_1 \,;\, \cdots \,;\, u_p)$ une famille de p vecteurs de V. On suppose que chaque vecteur u_j de cette famille $(1 \leqslant j \leqslant p)$ on a la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ suivante $\mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_{1\,;\,j} \\ \vdots \\ \lambda_{n\,;\,j} \end{pmatrix}$. Dans ce cas la matrice représentative de la famille $\mathcal{U} = (u_1 \,;\, \cdots \,;\, u_p)$, notée $\mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$, dans la base $\mathcal{B}$ est définie par :

$$\mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} \lambda_{1\,;\,1} & \cdots & \lambda_{1\,;\,j} & \cdots & \lambda_{1\,;\,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n\,;\,1} & \cdots & \lambda_{n\,;\,j} & \cdots & \lambda_{n\,;\,n} \end{pmatrix}$$

► 2 – Un résultat important

Soit $\mathcal{B} = (e_1 \,;\, \cdots \,;\, e_n)$ une base de V. Soit $\mathcal{U} = (u_1 \,;\, \cdots \,;\, u_n)$ une famille de n vecteurs de V.

Pour que $\mathcal{U}$ soit une base de V il faut et il suffit que la matrice $\mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$ soit inversible.

► 3 – Définition : matrice de passage

Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de V. La matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, notée

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2} = \mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)$$

Et on a :

$$[\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2}]^{-1} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_2 \longrightarrow \mathcal{B}_1} = \mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1)$$

► 4 – Théorème : action d'un changement de base sur un vecteur

Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de V. Soit u un vecteur de V. On note par

$X_1 = \mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}_1}(u)$ et $X_2 = \mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}_2}(u)$. On a alors :

$$X_1 = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2} X_2$$

Cette formule est extrêmement importante tant du point de vue théorique que pratique.