Généralités sur les espaces vectoriels

♣ 1 – Lois de composition interne

► Définition

Une loi de composition interne, notée $\boxplus$ sur l'ensemble V est une application de

$V \times V$ dans V :

$$\boxplus : \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (x\,;\,y) & \longmapsto & x \boxplus y \end{array}$$

Ainsi pour montrer que l'opération $\boxplus$ est une opération interne pour V, il faut

montrer que pour tous les éléments x et y de V, on a $x \boxplus y \in V$.

♣ 2 – Lois de composition externe

► Définition

Une loi de composition externe, notée $\star$ entre les ensembles V et $\mathbb{K}$, est une

application de $\mathbb{K} \times V$ dans V :

$$\star : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V \\ (\lambda\,;\,x) & \longmapsto & \lambda \star x \end{array}$$

Ainsi pour montrer que l'opération $\star$ est une opération externe entre V et $\mathbb{K}$, il faut

montrer que pour tous scalaire λ de $\mathbb{K}$ et pour tous les éléments x de V, on a

$\lambda \star x \in V$.

♣ 3 – Espace vectoriel

► Définition

Soit V un ensemble muni

– d'une loi de composition interne notée $\boxplus$: $\forall (u\,;\,v) \in V^2,\ u \boxplus v \in V$.

– d'une loi de composition externe entre V et $\mathbb{K}$, notée $\star$:

$\forall (\lambda\,;\,u) \in (\mathbb{K} \times V),\ \lambda \star u \in V$.

On dit que V est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on dit aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou $\mathbb{K}$-ev), si les 8 axiomes suivants sont vérifiés.

- Axiome $(A1)$

L'opération interne $\boxplus$ est commutative : $\forall (u\,;\,v) \in V^2,\ u \boxplus v = v \boxplus u$.

- Axiome $(A2)$

L'opération interne $\boxplus$ est assiciative :

$\forall (u\,;\,v\,;\,w) \in V^3,\ u \boxplus (v \boxplus w) = (u \boxplus v) \boxplus w$.

La valeur commune est notée $u \boxplus v \boxplus w$.

- Axiome $(A3)$

Il existe un unique élément de V, notée 0_V et appelé élément neutre de V tel que : $\forall u \in V,\ u \boxplus 0_V = 0_V \boxplus u = u$.

- Axiome $(A4)$

pour tout élément u de V, il existe un unique élément u' de V, appelé le

symétrique de u suivant l'opération interne \boxplus tel que l'on ait :

$\forall u \in V,\ \exists!\, u' \in V,\ u \boxplus u' = u' \boxplus u = 0_V$.

- Axiome $(A5)$:

On a : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u\,;\,v) \in V^2,\ \lambda \star (u \boxplus v) = (\lambda \star u) \boxplus (\lambda \star v)$.

- Axiome $(A6)$:

On a : $\forall (\lambda\,;\,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall u \in V,\ \lambda \star (\mu \star u) = (\lambda\mu) \star u$.

- Axiome $(A7)$:

On a : $\forall (\lambda\,;\,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall u \in V,\ (\lambda + \mu) \star u = (\lambda \star u) \boxplus (\mu \star u)$.

- Axiome $(A8)$:

On a : $\forall u \in V,\ 1 \star u = u$.

On dit que les éléments de V sont les **vecteurs** de V.

► Remarques

On adopte en général les notations et terminologies suivantes :

↬ L'opération interne $\boxplus$ est notée $+$ et est appelée l'addition vectorielle.

↬ L'opération externe $\star$ est notée $.$ et est appelée la multiplication scalaire.

↬ Pour tout $(u\,;\,v) \in V^2$, le vecteur $u + v$ s'appelle la somme des vecteurs u et v

.

↬ Pour tout $u \in V$, le vecteur symétrique u' suivant $+$ s'appelle le vecteur

opposé de u et se note $-u$. Ainsi $u' = -u$.

↬ L'élément neutre 0_V s'appelle le vecteur nul.

↬ Pour tout $(\lambda\,;\,u) \in \mathbb{K} \times V$, le vecteur $\lambda.u$ s'appelle le produit de u par λ et se note simplement λu.

↬ On peut alors définir la soustraction vectorielle sur V en posant :

$u - v = u + (-v)$.

Donc pour montrer qu'un ensemble non vide V est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, il faut que V est muni d'une opération interne et d'une opération externe satisfaisant aux fuit axiomes $A1\,;\cdots;\,A8$. Ceci amène à vérifier dix conditions au total !

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Alors pour tout scalaire λ et pour tou u de V on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0.u & = & 0_V \\ \lambda.0_V & = & 0_V \\ -u & = & (-1).u \end{array}\right.$$

♣ 4 – Exemples à connaître

► Premier exemple

L'ensemble $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour les opérations usuelles que sont l'addition et la multiplication.

► Deuxième exemple

L'ensemble $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ pour les opérations usuelles que sont l'addition et la multiplication.

► Troisième exemple

L'ensemble $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour l'addition dans $\mathbb{C}$ et la multiplication des nombres complexes par des nombres réels.

► Quatrième exemple

Soit A un ensemble non vide et V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'ensemble, noté V^A, des applications de A vers V est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les opérations suivantes :

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour toutes les applications $f : A \longrightarrow V$ et $g : A \longrightarrow V$, on note $f + g$ et λf les applications définies par :

$$f+g : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & V \\ a & \longmapsto & (f+g)(a) = f(a) + g(a) \end{array} \right.$$

et

$$\lambda f : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & V \\ a & \longmapsto & (\lambda f)(a) = \lambda f(a) \end{array} \right.$$

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est souvent rencontré en exercices.

► Cinquième exemple

L'ensemble des suites d'éléments de V est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

► Sixième exemple

On note par $\mathbb{K}[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ d'une seule variable x et à coefficient dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{K}$ par $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_p x^p$. le nombre p est un entier naturel et les

$\alpha_{i\in\{1\,;\cdots;\,p\}}$ sont des élements de $\mathbb{K}$. L'ensemble $\mathbb{K}[x]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

► Septième exemple

L'ensemble $\mathcal{M}_{(n\,;\,p)}(\mathbb{K})$ est celui des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$. Cet ensemble, muni de la somme et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

► Huitième exemple

Soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Le produit cartésien $V = V_1 \times V_2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les opérations suivantes : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tous les éléments $u = (x_1\,;\,x_2)$ et $u' = (x_1'\,;\,x_2')$ de $V = V_1 \times V_2$, on pose $u + u' = (x_1 + x_1'\,;\,x_2 + x_2')$ et $\lambda u = (\lambda x_1\,;\,\lambda x_2)$.

► Neuvième exemple

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on peut généraliser l'exemple précédent (le huitième), au cas de n espaces vectoriels $V_1\,;\cdots;\,V_n$ sur $\mathbb{K}$. C'est pourquoi $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Les cas les plus utilisés sont le plan habituel $n = 2$ et l'espace habituel $n = 3$.

► Dixième exemple

De même, l'ensemble $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

► Cas particulier

On considère le demi-plan supérieur $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ muni des opérations

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u = (x_1\,;\,x_2) \in P,\ \forall u' = (x_1'\,;\,x_2') \in P,\ \begin{cases} u + u' &= (x_1 + x_1'\,;\,x_2 + x_2') \\ \lambda u &= (\lambda x_1\,;\,\lambda x_2) \end{cases}$

n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, pour les opérations précédentes, car : en

choisissant $\lambda = -1$ et $u = (0\,;\,1) \in P$ alors $\lambda u = (0\,;\,-1) \notin P$.

♣ 5 – Sous – espaces vectoriels

► Définition

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'un ensemble E est un sous-espace

vectoriel de V si les quatre conditions suivantes sont satisfaites :

$C1 :\ E \subset V$

$C2 :\ E \neq \emptyset$

$C3 :\ \forall (u\,;\,v) \in E^2,\ u + v \in E$

$C4 :\ \forall (\lambda\,;\,v) \in \mathbb{K} \times E,\ \lambda v \in E$

De façon plus condensée, on a aussi :

$C1 :\ E \subset V$

$C2 :\ E \neq \emptyset$

$C3 :\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u\,;\,v) \in E^2,\ u + \lambda v \in E$

► Théorème

Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V est lui même un $\mathbb{K}$-espace

vectoriel pour les mêmes opérations interne et externe sur V.

► Exemples

● Les seuls sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ et les droites qui passent par l'origine.

●● Les seuls sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$, les droites qui passent par l'origine et les plans qui contiennent l'origine.

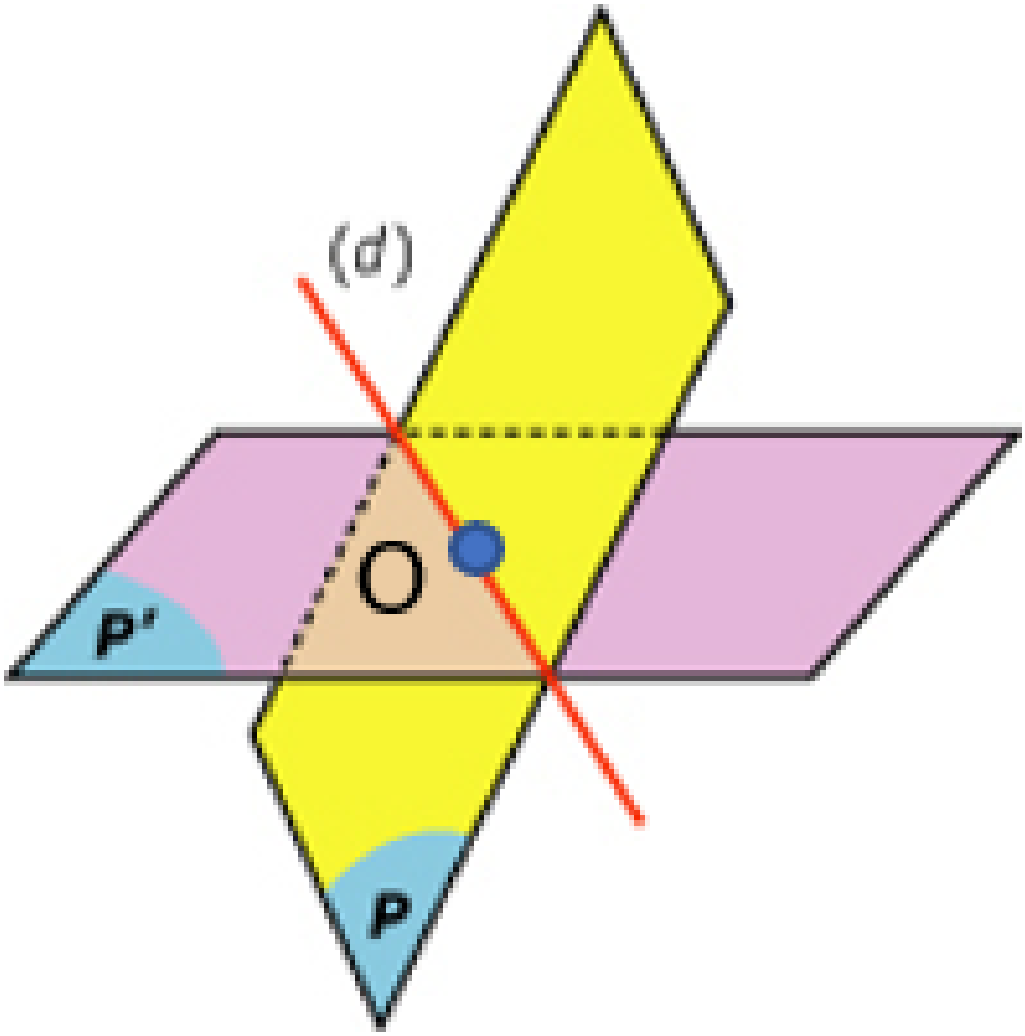
●●● Pour tout entier naturel n, l'ensemble $\mathbb{K}_n[x]$ des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[x]$.

●●●● Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble notée $\mathcal{C}(I\,;\,\mathbb{R})$ des fonctions réelles et continues sur est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^I$ des fonctions réelles définies sur I.

► Intersection de sous – espaces vectoriels

$Théorème$: Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Toute intersection de sous-espaces vectoriels de V est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel V.

Par exemple, les deux plans P et P' passant par l'origine O de $\mathbb{R}^3$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Leur intersection est également un sous-espace vectoriel de de $\mathbb{R}^3$: il s'agit de $la\ droite\ (d)$ qui passe aussi par l'origine O.



↬ En revanche, en général, la réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espaces vectoriel. L'addition vectorielle affine est un exemple illustrant ceci.