Ce qu'il faut savoir sur la diagonalisation

On note par n un nombre entier naturel non nul.

On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On désigne par E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u est un endomorphisme de E.

L'élément identité de E est noté Id_E.

■ Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme

• Définitions

On appelle $vecteur\ propre$ de u, tout élément non nul $X \in E$ tel qu'il existe un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ qui vérifie la relation, qui sera notée $(\star)$, suivante :

$(\star)\quad u(X) = \lambda X$

Un élément $\lambda \in \mathbb{K}$, satisfaisant à $(\star)$, s'appelle une $valeur\ propre$ de u à la condition qu'il existe un vecteur X non nul de E qui vérifie la relation $(\star)$.

L'ensemble des valeurs propres de u se note le spectre de u dans $\mathbb{K}$ et se note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$.

• Théorèmes

► A tout vecteur propre X, non nul, de u il correspond une et une seule valeur propre dite $valeur\ propre\ associée$ à $X \in u$.

►► A toute valeur propre λ de u il correspond un sous-espace vectoriel $V(\lambda) \in E$ qui est constitué des $vecteurs\ propres$ admettant λ comme valeur propre. On l'appelle le $sous-espace\ propre$ associé à λ. Ce sous-espace propre n'est pas nul et est stable par u.

►►► On a l'équivalence entre la proposition "λ est valeur propre de u" et la proposition "$u - \lambda\mathrm{Id}_E$ est non injectif".

►►►► Si u admet plusieurs valeurs propres, alors pour toute famille $\{\lambda_1\ ;\ \cdots\ ;\ \lambda_s\}$ (avec $s \geqslant 2$) de s valeurs propres distinctes de u on a :

$$\bigcap_{i=1}^{s} V(\lambda_i) = \{0\}$$

Toute famille $(X_i)_{i\in\{1\,;\cdots;\,s\}}$ de vecteurs propres non nuls, tels que λ_i soit associée à X_i, est une famille libre.

- **Propriété**

Si E est de dimension finie, n, sur $\mathbb{K}$, il est possible, sous réserve de connaitre une base de E, d'associer une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à un endomorphisme u. Les propriétés s'appliquent à A comme à u.

■ Polynôme caractéristiques d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie

- **Théorème**

On pose $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$ et on désigne par A la matrice représentative de u dans une certaine base donnée de E.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ il y a équivalence entre les propositions ci-dessous :

$i)$ le scalaire λ est valeur propre de la matrice A ;

$ii)$ la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible ;

$iii)$ on a $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Le polynôme $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ s'appelle **le polynôme caractéristique** de A (ou de u) et λ joue le rôle d'indéterminée. D'ailleurs, remarquons que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
Puis on a :

► $\deg(P(\lambda)) = n$;

►► $\deg(P(\lambda)) = n$;

►►► $P(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + \det(A)$;

►►►► les zéros, dans $\mathbb{K}$, de $P(\lambda)$ sont les valeurs propres de A (ou u) ;

►►►►► Si λ_0 est un zéro de $P(\lambda)$ d'ordre k alors on a : $1 \leqslant \dim(V(\lambda_0)) \leqslant k$.

■ Diagonalisation

On suppose que E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle.

- **Définitions**

On dit que u est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice associée à u soit diagonale dans cette ase $\mathcal{B}$.

On dit que que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- **Théorème**

Il y a équivalence entre :

$i)$ l'endomorphisme u est diagonalisable ;

$ii)$ il existe une base de E formée des vecteurs propre de u, c'est la $base\ propre$;

$iii)$ le polynôme caractéristique de u à ses n zéros dans $\mathbb{K}$ et pour chacun de ses zéros λ_i d'ordre k_i on a : $\dim(V(\lambda_i)) = k_i$;

$iv)$ la somme directe de tous les sous-espaces propre de u est égale à E.

- **Condition suffisante de diagonalisation**

Une condition suffisante pour que u soit diagonalisable est qu'il possède n valeurs propres toutes distinctes.

- **Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation**

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable est que son polynôme minimal n'admette que des zéros simples tous dans $\mathbb{K}$.

On rappelle que la polynôme unitaire, noté Π, de plus faible degré annulant A s'appelle le polynôme minimal de A. Tout polynôme annulateur de A est un multiple de ce polynôme minimal. En général il est délicat de déterminer le polynôme minimal Π et on calcule le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

■ Trigonalisation

On suppose que E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle.

- **Théorème**

Pour tout endomorphisme u de E tel que son polynôme caractéristique ait tous ses zéros dans $\mathbb{K}$ (ce qui est

toujours le cas dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) il existe une base de E sur laquelle la matrice associée à u soit triangulaire. Les éléments diagonaux étant les valeurs propres de u.

■ Le théorème de Cayley & Hamilton

Tout endomorphisme u de E ou toute matrice A de $\mathcal{M}\text{at}_n(\mathbb{K})$ est zéro de son polynôme caractéristique (qui est donc un polynôme d'endomorphisme ou un polynôme matriciel).
De fait le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.