Les fonctions circulaires réciproques

■ L'arc sinus

La restriction de la fonction sinus à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1\,;\,1]$.

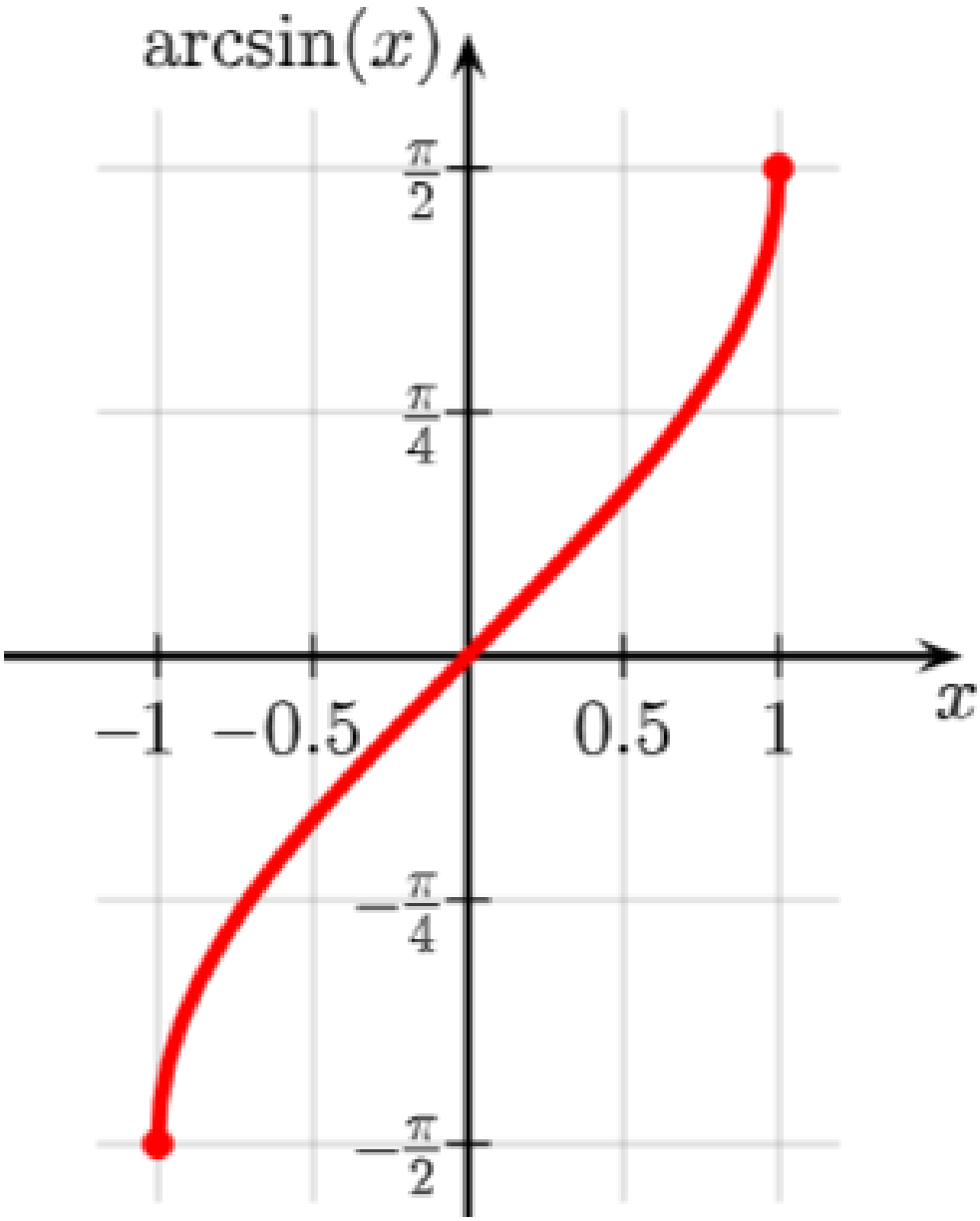
On appelle **arc sinus**, que l'on note $\arcsin$: $[-1\,;\,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ sa fonction réciproque. Donc

$\arcsin = \mathcal{R}_{\sin}$.

On a alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \arcsin(x) \\ x & \in & [-1\,;\,1] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \sin(y) \\ y & \in & \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right.$$

Graphiquement, on a :



La fonction $\arcsin$ est impaire et continue sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ et elle est dérivable sur $]-1\,;\,1[$ (car demi-tangente verticale en ± 1 impliquant sa non dérivabilité en ces deux abscisses).

On a alors :

$$\forall x \in]-1\,;\,1[,\ \left(\arcsin\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

De plus, on a :

- si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ alors $\arcsin\left(\sin(x)\right) = x$
- si $x \in [-1\,;\,1]$ alors $\sin\left(\arcsin(x)\right) = x$

●●● si $x \in [-1\,;\,1]$ alors $\cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2}$

●●●● si $x \in \,]-1\,;\,1[$ alors $\tan\big(\arcsin(x)\big) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Pour $x \in [-1\,;\,1]$ la primitive de la fonction $\arcsin$ à pour expression : $x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$.

■■ L'arc cosinus

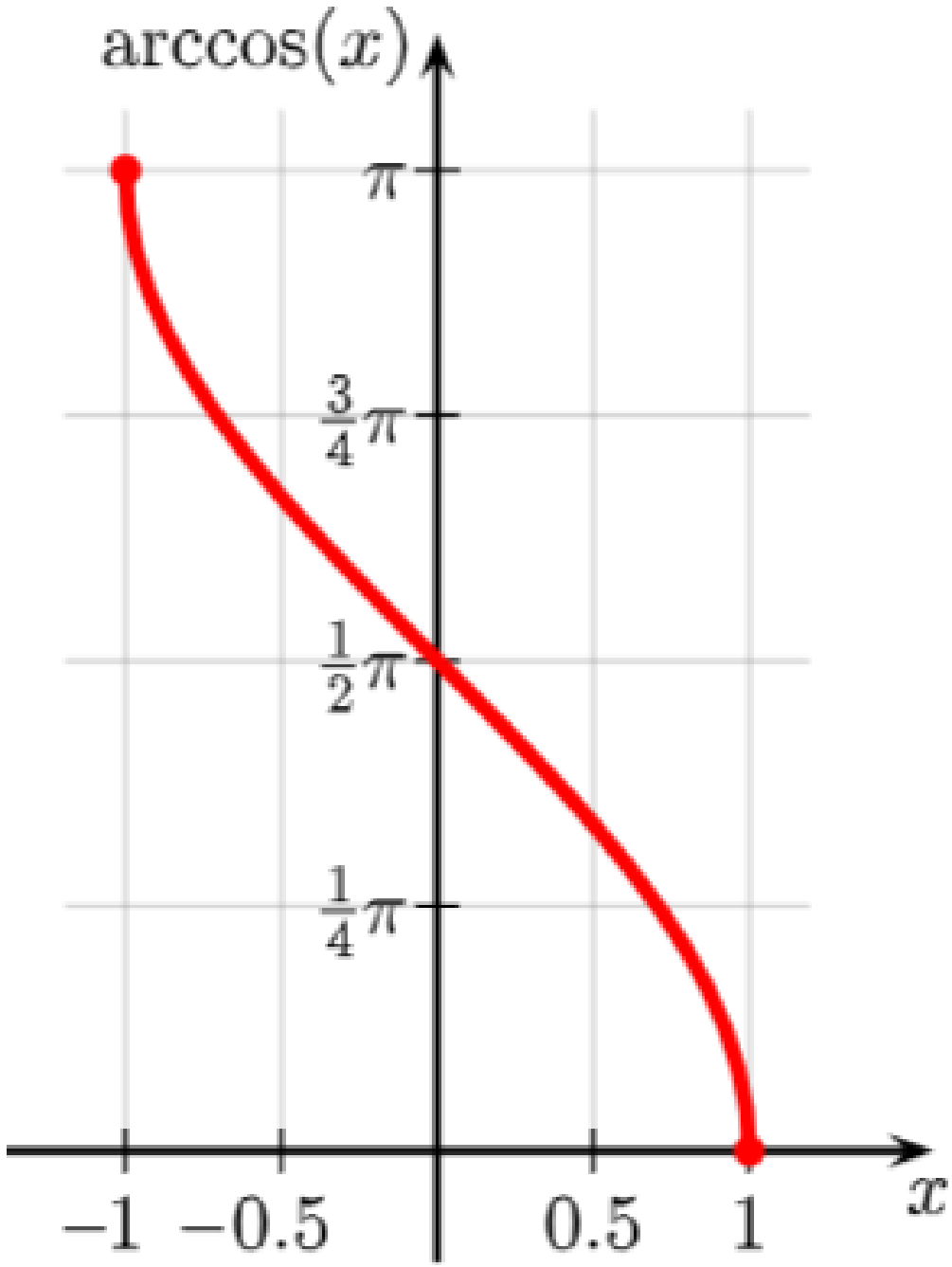
La restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ est une bijection de $[0\,;\,\pi]$ dans $[-1\,;\,1]$.

On appelle **arc cosinus**, que l'on note $\arccos$: $[-1\,;\,1] \longrightarrow [0\,;\,\pi]$ sa fonction réciproque. Donc $\arccos = \mathcal{R}_{\cos}$.

On a alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \arccos(x) \\ x & \in & [-1\,;\,1] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \cos(y) \\ y & \in & [0\,;\,\pi] \end{array}\right.$$

Graphiquement, on a :



La fonction $\arccos$ est continue sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ et elle est dérivable sur $]-1\,;\,1[$ (car demi-tangente verticale en ± 1 impliquant sa non dérivabilité en ces deux abscisses).

On a alors :

$$\forall x \in]-1\,;\,1[,\ \left(\arccos\right)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La fonction $\arccos$ n'est ni paire ni impaire, cependant on a la relation suivante :

$\forall x \in [-1\,;\,1]\,,\ \arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$

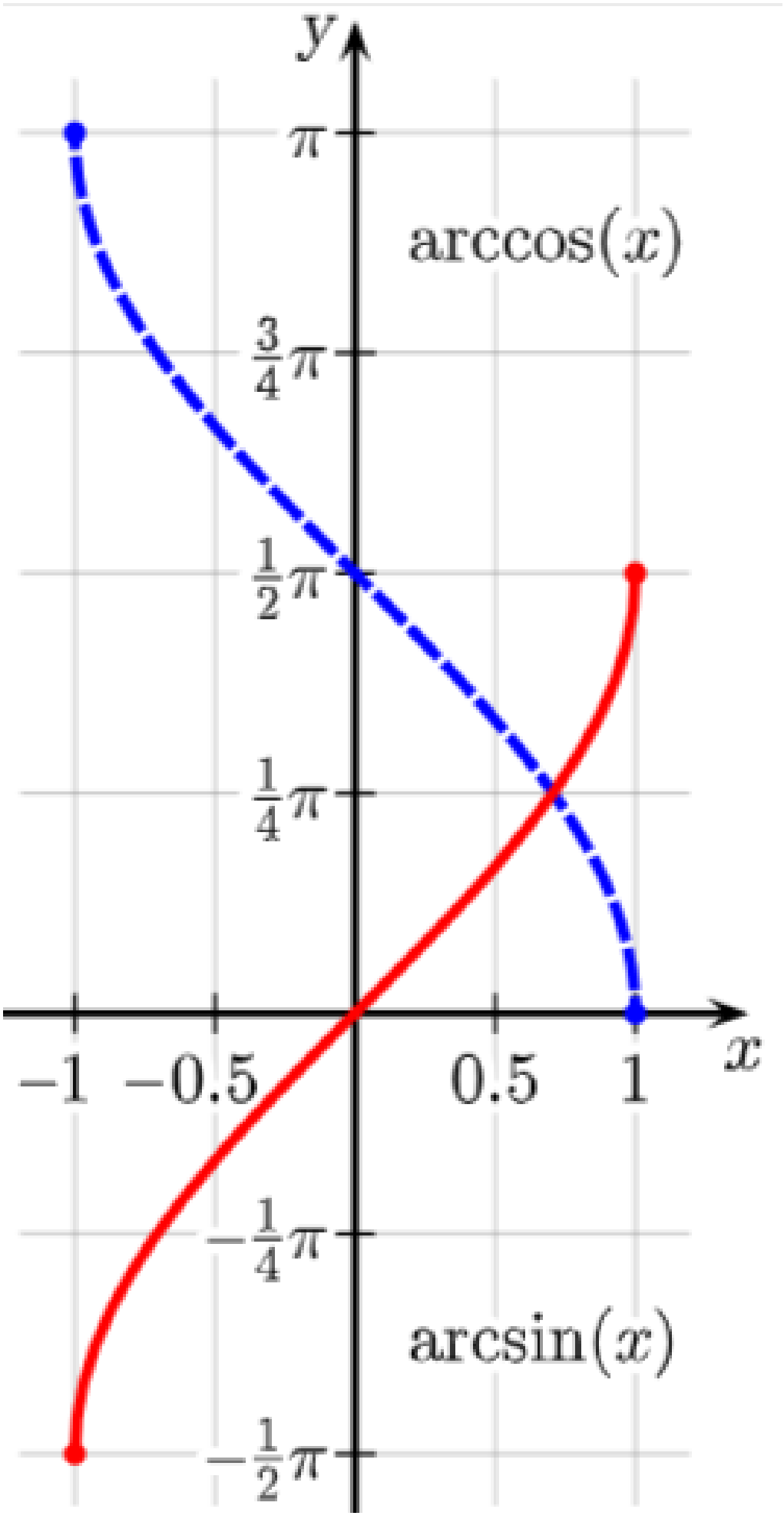
De plus, on a :

- si $x \in [0\,;\,\pi]$ alors $\arccos\big(\cos(x)\big) = x$
- si $x \in [-1\,;\,1]$ alors $\sin\big(\arccos(x)\big) = \sqrt{1-x^2}$
- si $x \in [-1\,;\,1]$ alors $\cos\big(\arccos(x)\big) = x$
- si $x \in]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,1[$ alors $\tan\big(\arccos(x)\big) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Pour $x \in [-1\,;\,1]$ la primitive de la fonction $\arccos$ à pour expression : $x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + K$

avec $K \in \mathbb{R}$.

De plus, on a les graphes suivants :


y
π
arccos(x)
3/4 π
1/2 π
1/4 π
−1
−0.5
0.5
1
x
−1/4 π
arcsin(x)
−1/2 π

Ce qui nous permet d'illustrer la propriété algébrique suivante :

$$\forall x \in [-1\,;\,1]\,,\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

■■■ L'arc tangente

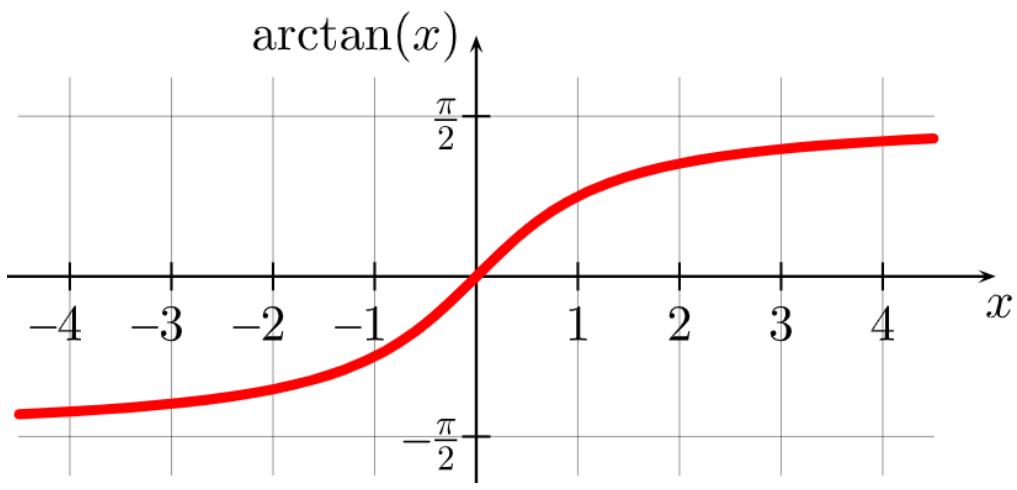
La restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.

On appelle **arc tangente**, que l'on note $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ sa fonction réciproque. Donc

$\arctan = \mathcal{R}_{\tan}$.

On a alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \arctan(x) \\ x & \in & \mathbb{R} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \tan(y) \\ y & \in & \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\end{array}\right.$$



La fonction $\arctan$ est impaire et continue sur $\mathbb{R}$ et elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\arctan\big)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

De plus, on a :

• si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\arctan\big(\tan(x)\big) = x$

•• si $x \in \mathbb{R}$ alors $\sin\big(\arctan(x)\big) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

••• si $x \in \mathbb{R}$ alors $\cos\big(\arctan(x)\big) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

•••• si $x \in \mathbb{R}$ alors $\tan\big(\arctan(x)\big) = x$

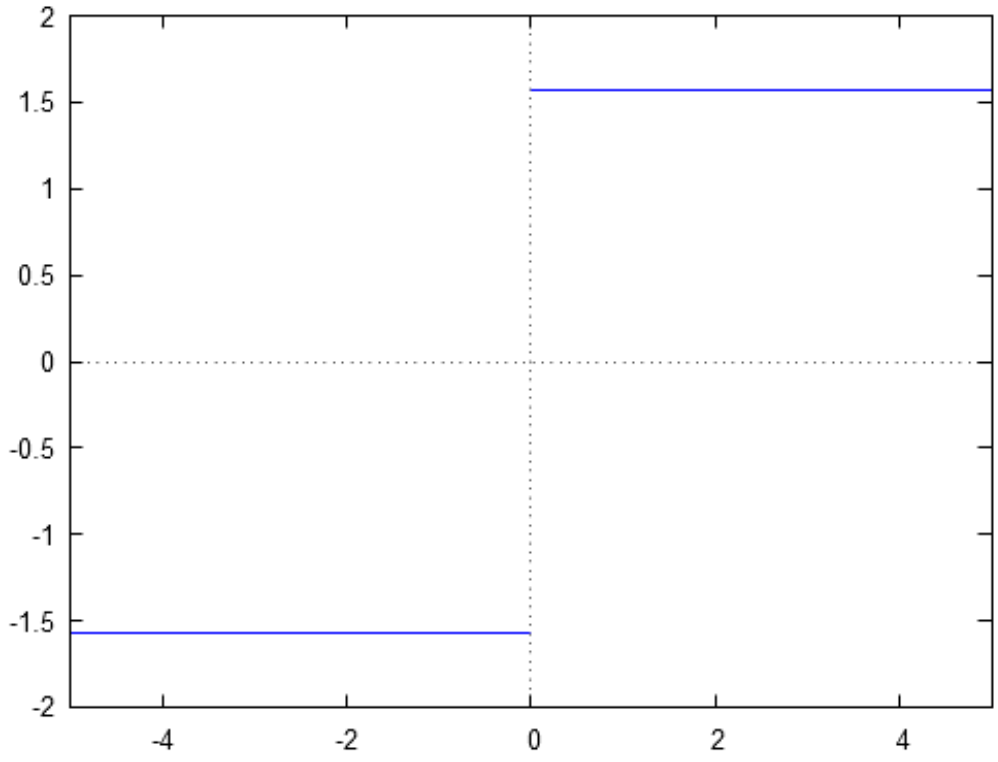
Pour $x \in \mathbb{R}$ la primitive de la fonction arctan à pour expression : $x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + K$ avec $K \in \mathbb{R}$.

En outre, rappelons (car cela est toujours pratique) que l'on a :

► $\displaystyle\int \frac{1}{\left(1+u^2\right)^2}\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{1+u^2} + \arctan(u)\right) + K \quad (K \in \mathbb{R})$

►► $\displaystyle\int \frac{1}{\left(1+u^2\right)^3}\,du = \frac{1}{8}\left(\frac{u(3u^2+5)}{\left(1+u^2\right)^2} + 3\arctan(u)\right) + K \quad (K \in \mathbb{R})$

De plus, on a le graphe suivant de $x \in \mathbb{R}^\star \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$:



Ce qui nous permet d'illustrer la propriété algébrique suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \text{signe}(x)\frac{\pi}{2}$$

Enfin indiquons la relation très pratique suivante, pour les deux réels x et y tels que $xy \neq 1$:

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi \quad \text{avec } k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad xy > 1 \text{ et } (x\,;\,y) \in \left(\mathrm{R}^{+\star}\right)^2 \\ 0 & \text{si} \quad xy < 1 \\ -1 & \text{si} \quad xy > 1 \text{ et } (x\,;\,y) \in \left(\mathrm{R}^{-\star}\right)^2 \end{cases}$$

■■■■ L'arc cotangente

La restriction de la fonction cotangente à l'intervalle $]0\,;\,\pi[$ est une bijection de $]0\,;\,\pi[$ dans $\mathbb{R}$.

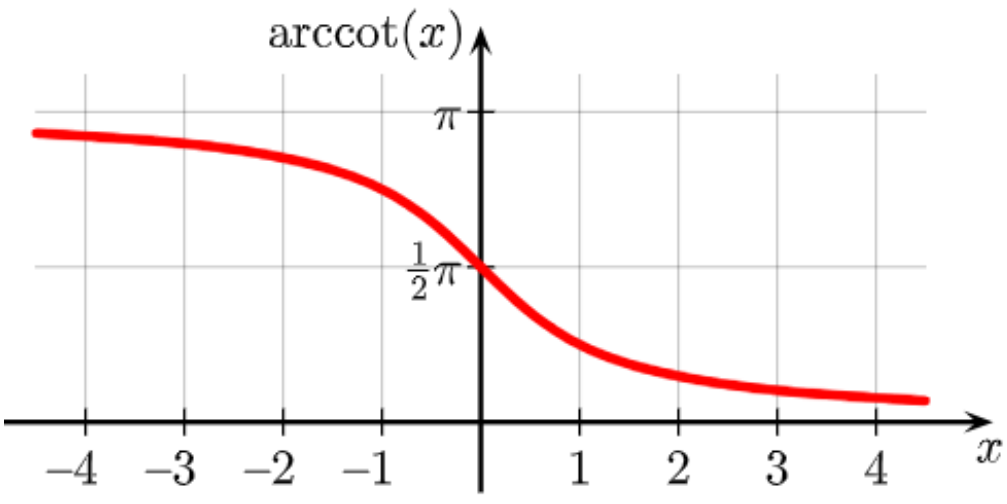
On appelle **arc cotangente**, que l'on note $\arccotan : \mathbb{R} \longrightarrow]0\,;\,\pi[$ sa fonction réciproque. Donc

$\arccotan = \mathcal{R}_{\text{cotan}}$.

On a alors :

$$\begin{cases} y = \arccotan(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \text{cotan}(y) \\ y \in]0\,;\,\pi[\end{cases}$$

Graphiquement, on a :



La fonction arccotan est continue sur $\mathbb{R}$ et elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\operatorname{arccotan}\big)'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

De plus, on a :

- si $x \in]0\,;\,\pi[$ alors $\operatorname{arccotan}\big(\operatorname{cotan}(x)\big) = x$

- si $x \in \mathbb{R}$ alors $\sin\big(\operatorname{arccotan}(x)\big) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

- si $x \in \mathbb{R}$ alors $\cos\big(\operatorname{arccotan}(x)\big) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

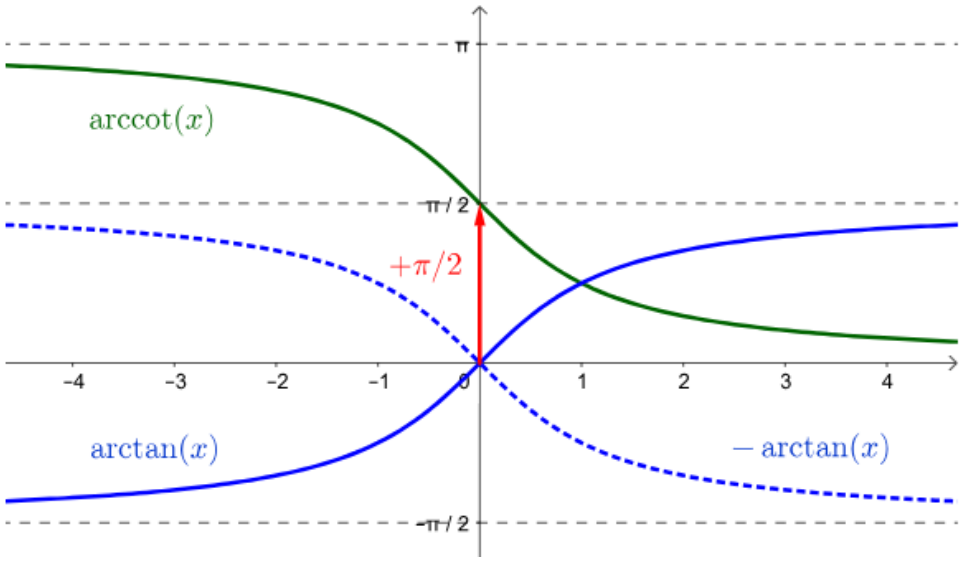
- si $x \in \mathbb{R}^\star$ alors $\tan\big(\operatorname{arccotan}(x)\big) = \dfrac{1}{x}$

- si $x \in \mathbb{R}$ alors $\operatorname{cotan}\big(\operatorname{arccotan}(x)\big) = x$

Pour $x \in \mathbb{R}$ la primitive de la fonction arccotan à pour expression : $x\operatorname{arccotan}(x) + \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + K$

avec $K \in \mathbb{R}$.

De plus, on a les graphes suivants :



Ce qui nous permet d'illustrer la propriété algébrique suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ \arctan(x) + \operatorname{arccotan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Indiquons les deux relations suivantes :

► Si $x > 0$ alors on a $\operatorname{arccotan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotan}(x) = \arctan(x)$

►► Si $x < 0$ alors on a $\operatorname{arccotan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3\pi}{2} - \operatorname{arccotan}(x) = \pi + \arctan(x)$