Ce qu'il faut savoir sur les déterminants

On désigne par n et p deux nombres entiers naturels non nuls.

On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

On désigne par E un espace vectoriel de dimension n de base $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$.

I – Définitions et propriétés des déterminants

1 – Formes $p-$linéaire alternée

Définitions

Une forme $p-$linéaire est une application de E^p dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout i de

$\{1, ..., p\}$ et tout $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ de E^p l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & f(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_p) \end{array}$$

soit une forme linéaire.

Une forme $p-$linéaire f est alternée si et seulement si elle est nulle pour tout

élément de E^p ayant deux composantes égales.

• $Théorème$: L'ensemble des formes $n-$linéaires alternées sur E forme un

espace vectoriel de dimension 1.

2 – Définition des déterminants

↬ Déterminant de n éléments, notés $x_1, ..., x_n$, de E :

Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$ est l'image de $(x_1, ..., x_n)$ par l'unique forme $n-$ linéaire alternée, $\det_{\mathcal{B}}$, de E^n dans $\mathbb{K}$ telle que $\det_{\mathcal{B}}(e_1, ..., e_n) = 1$

↬ Déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que nous noterons $\det A$:

Le terme $\det A$ est le déterminant dans la base canonique des vecteurs colonnes de A.

Si $\forall i \in \{1, ..., n\}, x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, e_j$ alors on a les notations suivantes

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n) = \det(x_1, ..., x_n) = \det(a_{i,j}) = |\, a_{i,j}\, |.$$

On dit que n est l'ordre du déterminant.

Si f est une transformation élémentaire de A alors $f\,(\det A) = \det f(A)$.

3 – Propriétés

On désigne par S_n le $n-$ième groupe symétrique et par $\epsilon(\sigma)$ une $signature$ de la permutation σ. Dans ce cas on a le théorème suivant :

• $Théorème$: $\det(a_{i,j}) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \times a_{1,\sigma(1)} \times ... \times a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \times a_{\sigma(1),1} \times ... \times a_{\sigma(n),n}$

Puis on a :

• $Théorème$: Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

– si une colonne de A est entièrement nulle alors $\det A = 0$

– si une ligne de A est entièrement nulle alors $\det A = 0$

– si deux colonnes de A sont égales alors $\det A = 0$

– si deux lignes de A sont égales alors $\det A = 0$

– si on échange deux colonnes de A alors $\det A$ est multiplié par -1 ;

– si on échange deux lignes de A alors $\det A$ est multiplié par -1 ;

– si ajoute à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes alors $\det A$ est inchangé ;

– si ajoute à une ligne de A une combinaison linéaire des autres lignes alors $\det A$ est inchangé ;

– le $\det A$ est linéaire par rapport à chaque colonne de la matrice A ;

– le $\det A$ est linéaire par rapport à chaque ligne de la matrice A.

• $Théorème$: Soit A et B deux matrices de l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On désigne par α un élément de $\mathbb{K}$. On a :

– $\det I_n = 1$;

– le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produits des éléments présents sur aa diagonale principale ;

– le $\det(AB) = \det A \times \det B = \det(BA)$

– $\det(\alpha A) = \alpha^n \times \det A$

– $\det({}^tA) = \det A$

– dire que $\det A \neq 0$ est équivalent aux propositions suivantes :

$\hookrightarrow$ la matrice A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;

$\hookrightarrow$ les vecteurs colonnes de la matrice A sont linéairement indépendants ;

$\hookrightarrow$ les vecteurs lignes de la matrice A sont linéairement indépendants ;

$\hookrightarrow$ $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

$\hookrightarrow$ $\det(A^{-1}BA) = \det B$

– si u est un endomorphisme de E alors $\det u$ est le déterminant d'une matrice de u par rapport à une base de E. Si $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice représentative de u, dans la base $\mathcal{B}$, alors $\det u = \det U$.

II – Développement d'un déterminant – Inverse d'une matrice

1 – Définitions

On désigne par i et j deux nombres entiers naturels compris entre 1 et n.

– Le mineur de l'élément $a_{i,j}$ de la matrice A est le déterminant de la matrice A_{ij} obtenue à partir de la matrice A en supprimant la ligne i et la colonne j ;

– Le cofacteur de l'élément $a_{i,j}$ est $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$;

– La comatrice de A est notée $\text{com}(A)$ est la matrice des cofacteurs.

• *Théorème* : On a :

– $\det A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{ij}$;

$-\ A \times {}^t\mathrm{com}(A) = {}^t\mathrm{com}(A) \times A = I_n \times \det A$;

$-$ si $\det A \neq 0$ alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{com}(A)$;

2 – Cas particulier

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ alors $\det A = ad - bc$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ alors $\det A = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb.$

C'est la règle de Pierre Sarrus.

III – Application au rang et aux systèmes d'équations linéaires

Soit A une matrices de l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = {}^t(b_1 ... b_p) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On désigne par $(\mathcal{S})$ un système de p équations linéaires à n inconnues $x_1, ..., x_n$.

On a :

$(\mathcal{S}) :\ AX = B$

avec $X = {}^t(x_1 ... x_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

• $Théorème$: Le rang de la matrice A est égal au plus grand ordre des sous

matrices carrées de A de déterminant non nul.

1 – Système de Cramer

Définition

Le système $(\mathcal{S})$ est de $Cramer$ si et seulement si $n = p$ et le rang de $(\mathcal{S}$ est n.

• $Théorème$: On note par A_j la matrice obtenue à partir de A en remplaçant le

colonne numéro j par le second membre du système $(\mathcal{S})$, à savoir B.

Tout système de $Cramer$ admet une solution unique :

$$\forall j \in \{1, ..., n\},\ x_j = \frac{\det A_j}{\det A}.$$

2 – Cas général

Soit r le rang de la matrice A, tel que $r \leqslant n$ et $r \leqslant p$, et supposons que les équations soient écrites de telle sorte que :

$\det(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant r\,;\, 1 \leqslant j \leqslant r} \neq 0$

Définitions

– On appelle $x_1, ..., x_r$ les inconnues principales ;

– On appelle les r premières équations les " équations principales " ;

– Un déterminant est $caractéristique$ si et seulement si il est de la forme suivante $(r < k \leqslant p)$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & \cdots & a_{rr} & b_r \\ a_{k1} & \cdots & \cdots & a_{kr} & b_k \end{vmatrix}$$

• $Théorème\ de\ Fontené - Rouché$:

Notons $(\mathcal{S}')$ le système suivant :

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij}\, x_j = b_i - \sum_{j=r+1}^{n} a_{ij}\, x_j$$

avec $i \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant i \leqslant p$.

Dans ce cas :

$-$ si $r = p$ alors le système $(\mathcal{S})$ à des solutions qui dépendent de $n - r$ paramètres réels (les inconnues non principales). Les solutions sont obtenues en résolvant le système de $Cramer$ $(\mathcal{S}')$.

$-$ si $r < p$ et si l'un des déterminants $caractéristiques$ est non nul alors le système $(\mathcal{S})$ est impossible. On dit aussi que le système $(\mathcal{S})$ est incompatible.*

$-$ si $r < p$ et si tous les déterminants $caractéristiques$ sont nuls alors le système $(\mathcal{S})$ est équivalent au système des r " équations principales ". On dit aussi que le système $(\mathcal{S})$ est compatible.