Cours sur les ensembles

1 Eléments de logique.

♣ Notions sur les ensembles

On peut imaginer, de manière un peu naïve, **un ensemble** comme étant une collection d'objets.

Si on note par x l'objet qui appartient à l'ensemble E, on note ceci comme $x \in E$,

et doit se lire x *appartient à* E.

Dans le cas où x n'appartient pas à l'ensemble E, on note ceci $x \notin E$.

Il y a plusieurs manière de décrire un ensemble E, les deux plus courantes sont les suivantes :

↬ *En extension*

C'est lorsque l'on précise tous les éléments qui constituent l'ensemble E. On doit indiquer les différents éléments constitutifs de E entre deux accolades, et séparés par une virgule ou un point virgule. Par exemple : $E = \{1\,;\,3\,;\,5\,;\,7\,;\,9\}$.

↬ *En compréhension*

C'est lorsque les éléments constitutifs ne sont pas tous explicitement mentionnés. Cependant, on dispose d'un critère pour savoir si un objet donné appartient ou non dans l'ensemble considéré. Par exemple, on considère l'ensemble E suivant :

$E = \{n \in \mathbb{N} \,/\, 2^n + 1 \text{ est un nombre premier}\}$, qui se lit comme

"n *est un nombre entier naturel tel que la quantité* $2^n + 1$ *soit un nombre premier*"

.

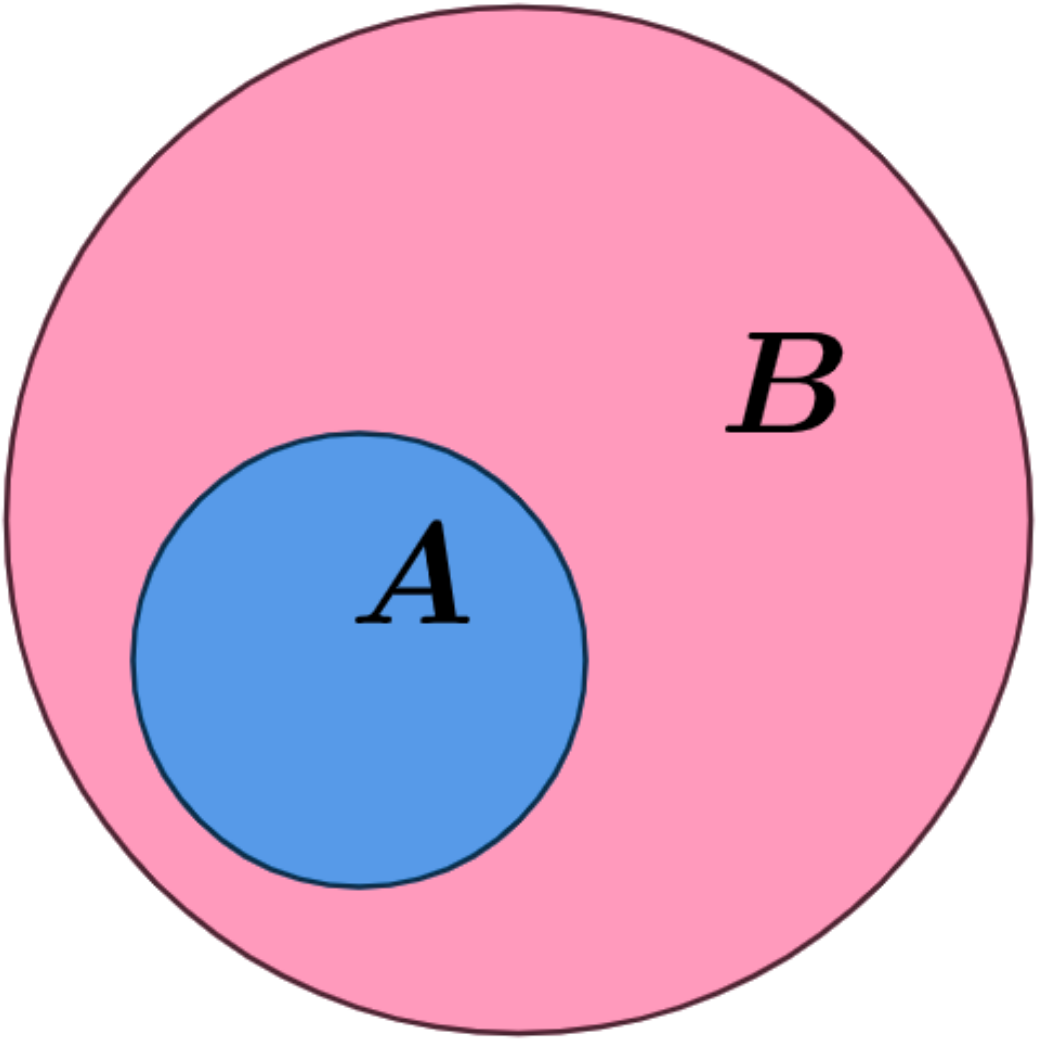
Il n'est pas possible d'énumérer tous les éléments de E. On peut, par exemple dire que 2 est un élément de E car $2^2 + 1 = 5$ est un nombre premier, mais que 7 n'appartient pas à l'ensemble E.

Un ensemble qui contient uniquement **un seul élément** est appelé **un singleton**.

On admet l'existence d'un ensemble qui ne contient **aucun élément**, c'est l' **ensemble vide**, et il se note $\emptyset$.

- **Inclusion**

Soit E et F deux ensembles. On dit que F est un sous-ensemble de E si tout élément de F est également un élément de E. On dit alors que F est inclus dans E, ou que F est une partie de E, et on note ceci comme $F \subset E$. A la définition mathématiques $\forall x \in A,\ \ x \in B$ on associe la figure :



On connait tous la suite d'inclusion suivante : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \ldots$

Bien sur, on a l'inclusion suivante $E \subset E$. Et de plus, il est évident que pour les trois ensembles A, B et C, on a la propriété de **transitivité** suivante :

$$\big((A \subset B) \wedge (B \subset C)\big) \Longrightarrow \big(A \subset C\big)$$

Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ est inclus dans tous les autres ensembles. Donc $\emptyset$ est une partie de E : $\emptyset \subset E$.

L'ensemble qui contient toutes les parties possibles de E se note $\mathscr{P}(E)$. Cet

ensemble $\mathscr{P}(E)$ s'appelle **l'ensemble des parties de** E. Donc cet ensemble $\mathscr{P}(E)$ n'est jamais vide puisqu'il contient, bien évidemment, E lui-même et aussi l'ensemble vide $\emptyset$.

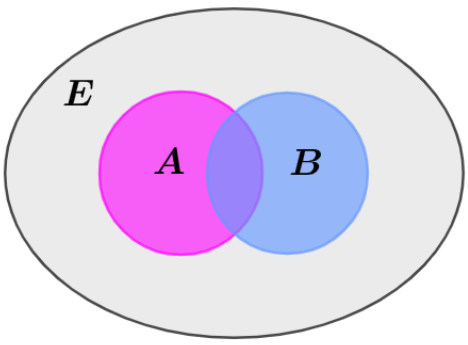
Par exemple, si $E = \{a\,;\,b\}$ alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset\,;\,\{a\}\,;\,\{b\}\,;\,E\}$

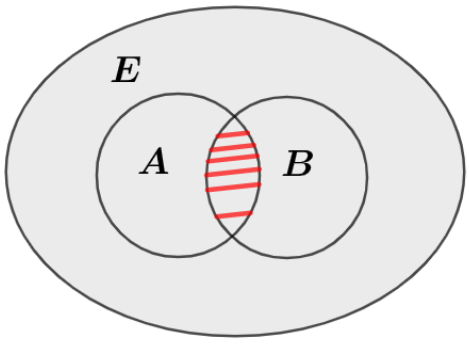
•• Egalité

Soit E et F deux ensembles. On dit que E est égal à F si on a $E \subset F$ et $F \subset E$. Et on note ceci $E = F$.

••• Intersection

Soit A et B deux parties de E. L'**intersection** des parties A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent **à la fois** à A et à B. On note cet ensemble intersection par : $A \cap B$. On peut lire ceci comme A **et** B. On a alors la définition mathématique suivante $\big(x \in (A \cap B) \subset E\big) \Longleftrightarrow \big((x \in A) \wedge (x \in B)\big)$, et l'on associe la figure (de $Venn$) :





La partie hachurée représente : $A \cap B$

Et on a les quatre propriétés (évidentes) suivantes :

$1-A\cap E=A$

$2-A\cap\emptyset=\emptyset$

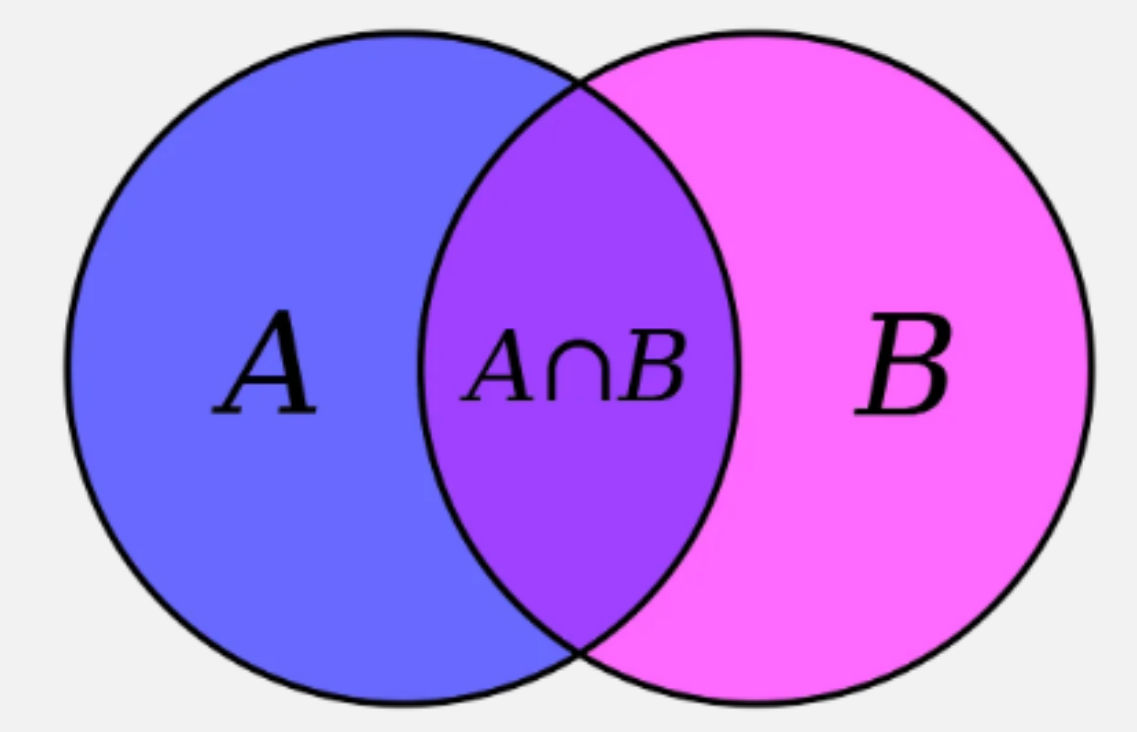
$3-(A\cap B)\subset A$

$4-(A\cap B)\subset B$

Lorsque deux ensembles A et B d'un même ensemble E vérifient $A\cap B=\emptyset$, ont dit alors que les deux ensembles A et B sont **disjoints**.

• • • • Réunion

Soit A et B deux parties de E. La **réunion** des parties A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B. On note cet ensemble réunion par : $A\cup B$. On peut lire ceci comme A **ou** B. Il s'agit d'un **ou inclusif** car l'intersection appartient à la réunion. On a alors la définition mathématique suivante $\big(x\in(A\cup B)\subset E\big)\Longleftrightarrow\big((x\in A)\vee(x\in B)\big)$, et l'on associe la figure (de $Venn$) :



Et on a les sept propriétés (évidentes) suivantes :

$1 - A \cup E = E$

$2 - A \cup \emptyset = A$

$3 - A \subset (A \cup B)$

$4 - B \subset (A \cup B)$

$5 - A = A \cup (A \cap B)$

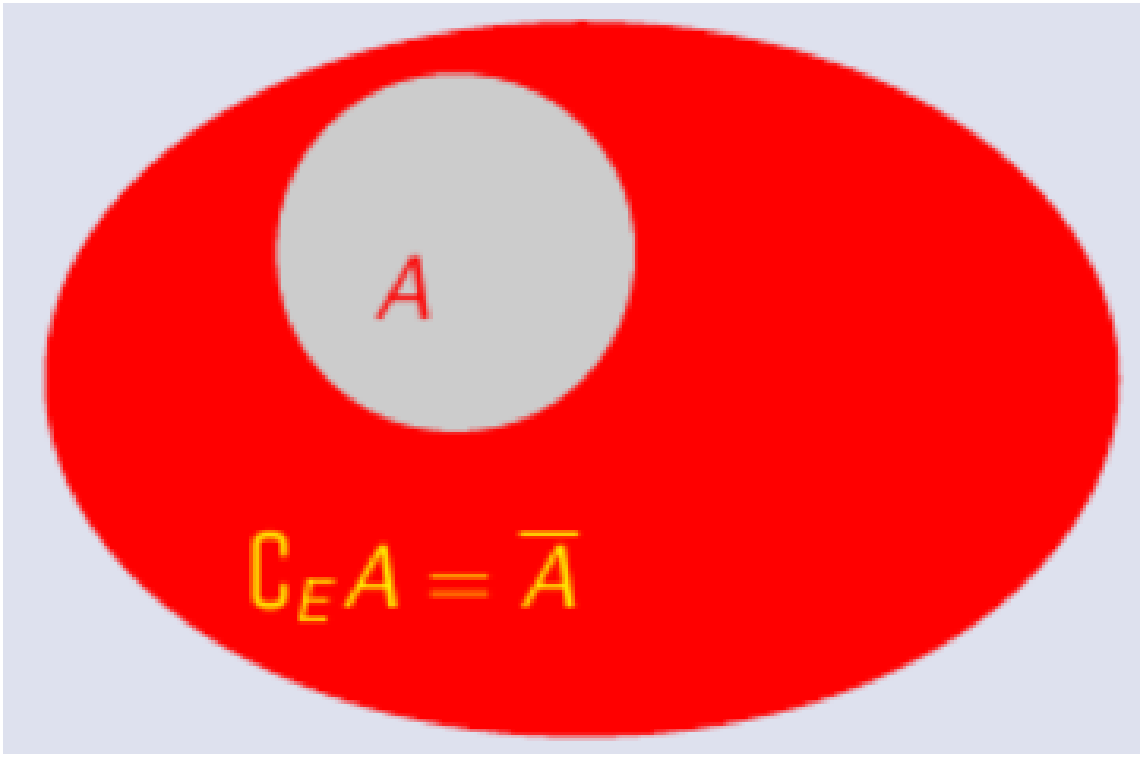
$6 - B = B \cup (A \cap B)$

$7 - \big((A \cup B) = \emptyset\big) \iff \big((A = \emptyset) \wedge (B = \emptyset)\big)$

● ● ● ● ● Complémentaire

Soit A une partie de E. On définit **la partie complémentaire**, encore appelé le

complémentaire de A dans E, noté $\complement_E^A$ ou $\overline{A}$, comme étant l'ensemble des éléments de E **qui ne sont pas** dans A. On a donc la définition mathématique suivante $\left(x \in \complement_E^A\right) \Longleftrightarrow \left((x \in E) \wedge (x \notin A)\right)$ et on associe la figure (de $Venn$) :



Et on a les cinq propriétés (évidentes) suivantes :

$1 - A \cup \complement_E^A = E$

$2 - A \cap \complement_E^A = \emptyset$

$3 - \overline{\overline{A}} = A$

$4 - \complement_E^E = \emptyset$

$-\complement_E^\emptyset = E$

Ainsi, si A et B sont deux parties de E alors on dit que A est le complémentaire de B sur E (Et B est le complémentaire de A sur E) lorsque :

$$\left(A = \complement_E^B\right) \iff \Big(\big((A \cup B) = E\big) \wedge \big((A \cap B) = \emptyset\big)\Big)$$

Et bien évidemment :

$$\left(B = \complement_E^A\right) \iff \Big(\big((A \cup B) = E\big) \wedge \big((A \cap B) = \emptyset\big)\Big)$$

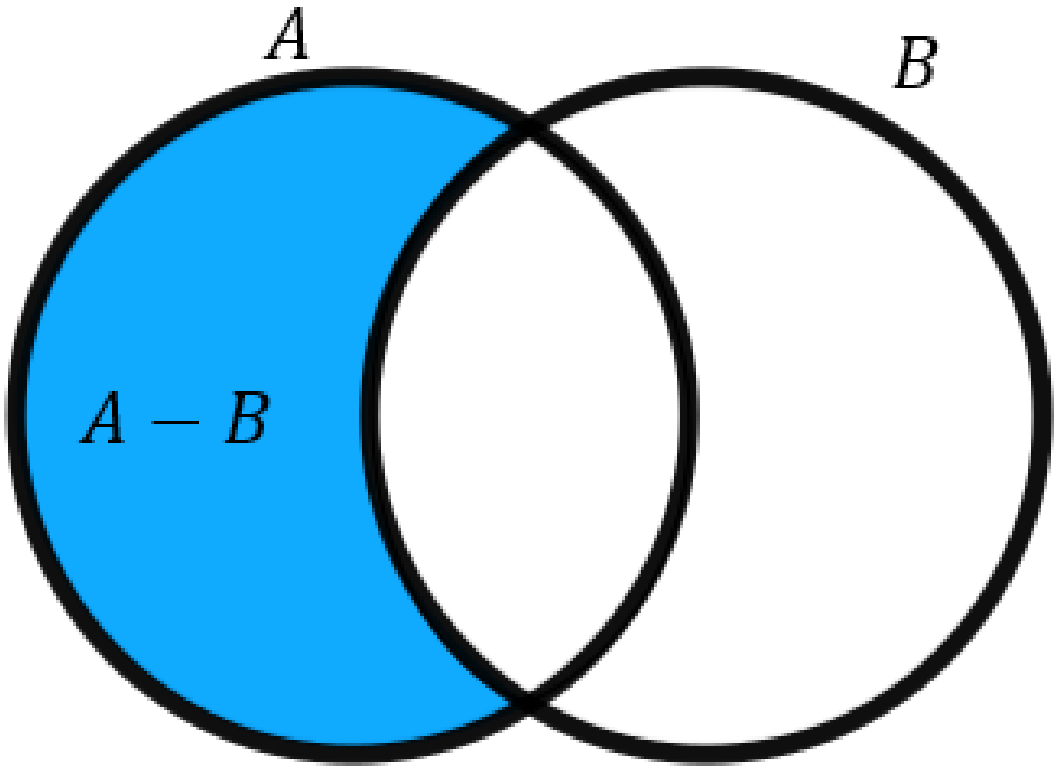
De plus, si $A \subset B$ alors $\complement_E^B \subset \complement_E^A$.

●●●●●● Différence

Soit A et B deux parties d'un même ensemble E. La différence de A avec B est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B. On le note $A \backslash B$ ou $A - B$.

On associe donc la définition mathématique suivante

$\big((x \in (A \backslash B) \subset E\big) \iff \big((x \in A) \wedge (x \notin B)\big)$. A laquelle on associe la figure suivante :



Ce qui entraîne que $A\backslash B = A \cap \overline{B}$.

De plus, si $A \subset B$ alors $B\backslash A = \complement_B^A$.

Le lien avec la réunion et l'union est donné par la relation importante suivante :

$$\boxed{A \cup B = (A\backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B\backslash A)}$$

Si A et B sont deux parties d'un même ensemble E alors on a : $E\backslash A = \complement_E^A$.

Sur la figure précédente, on constate que $A = (A\backslash B) \cup (A \cap B)$ et aussi que

$B = (A \cap B) \cup (B\backslash A)$.

Enfin, mentionnons la propriété évidente suivante : $\big(A\backslash B = \emptyset\big) \iff \big(A \subset B\big)$

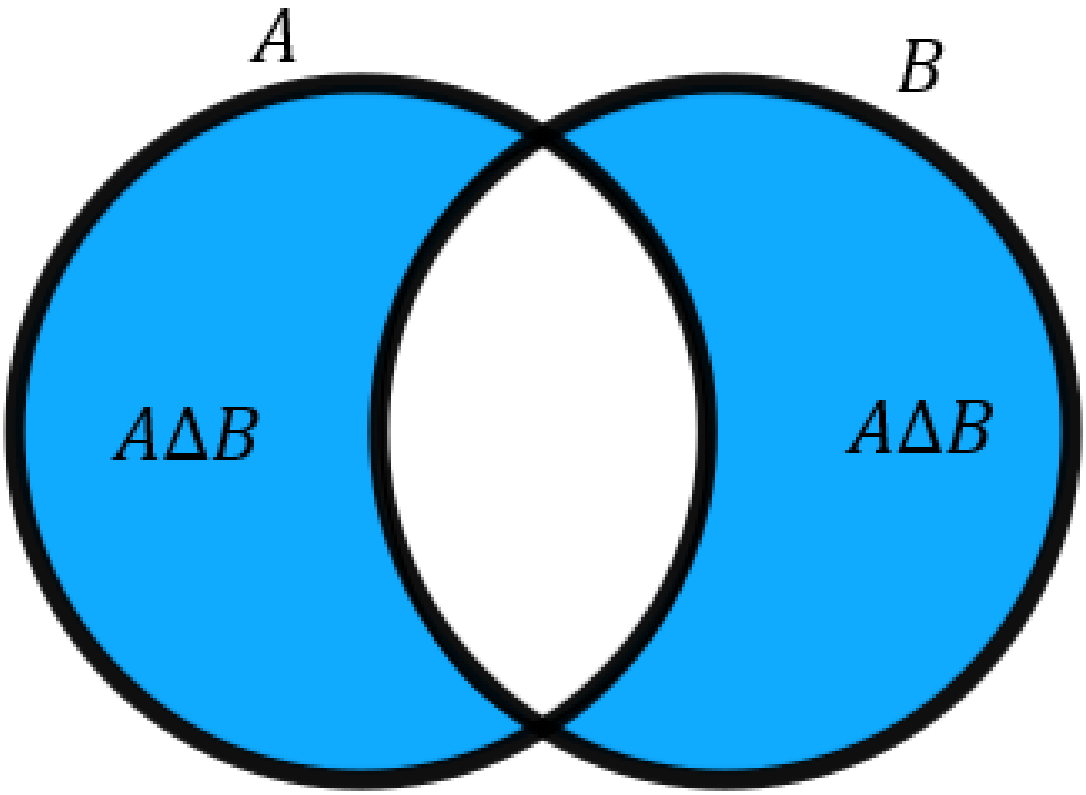
• • • • • • • Différence symétrique

La différence symétrique de A et de B, est notée « $A\Delta B$ » (et doit se lire « A delta B ») est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, **mais pas aux deux à la fois**.

La différence symétrique de A et de B est la différence de $A \cup B$ et de $A \cap B$. On peut l'écrire sous les formes suivantes :

$$A\Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

Autrement dit $x \in (A\Delta B) \subset E$ signifie que x appartient à un, et un seul, des ensembles A et B. Il s'agit d'utiliser le **ou exclusif**. On a donc la définition $\big((x \in (A\Delta B) \subset E) \iff \big((x \in A) \vee_{exclusif} (x \in B)\big)$ et que l'on associe à la figure (de $Venn$) :



Soit A, B et C trois parties d'un même ensemble E. On a alors les quatre propriétés suivantes :

$1-A\Delta\emptyset = A$

$2-A\Delta A = \emptyset$

$3-A\Delta B = B\Delta A$ (commutativité)

$4-A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ (associativité).

◁ : Remarque

L'intersection, la réunion et le complémentaire permettent de définir un calcul algébrique dans $\mathscr{P}(E)$. Ce calcul algébrique sur l'ensemble des parties de E porte le nom **d'algèbre de Boole**.

♣♣ Lois sur les ensembles

Soit A, B et C trois parties de l'ensemble E.

↬ *Idempotence*

On a :

$$\begin{cases} A\cup A &= A \\ A\cap A &= A \end{cases}$$

↬ *Commutativité*

On a :

$$\begin{cases} A\cup B &= B\cup A \\ A\cap B &= B\cap A \end{cases}$$

↬ *Associativité*

On a :

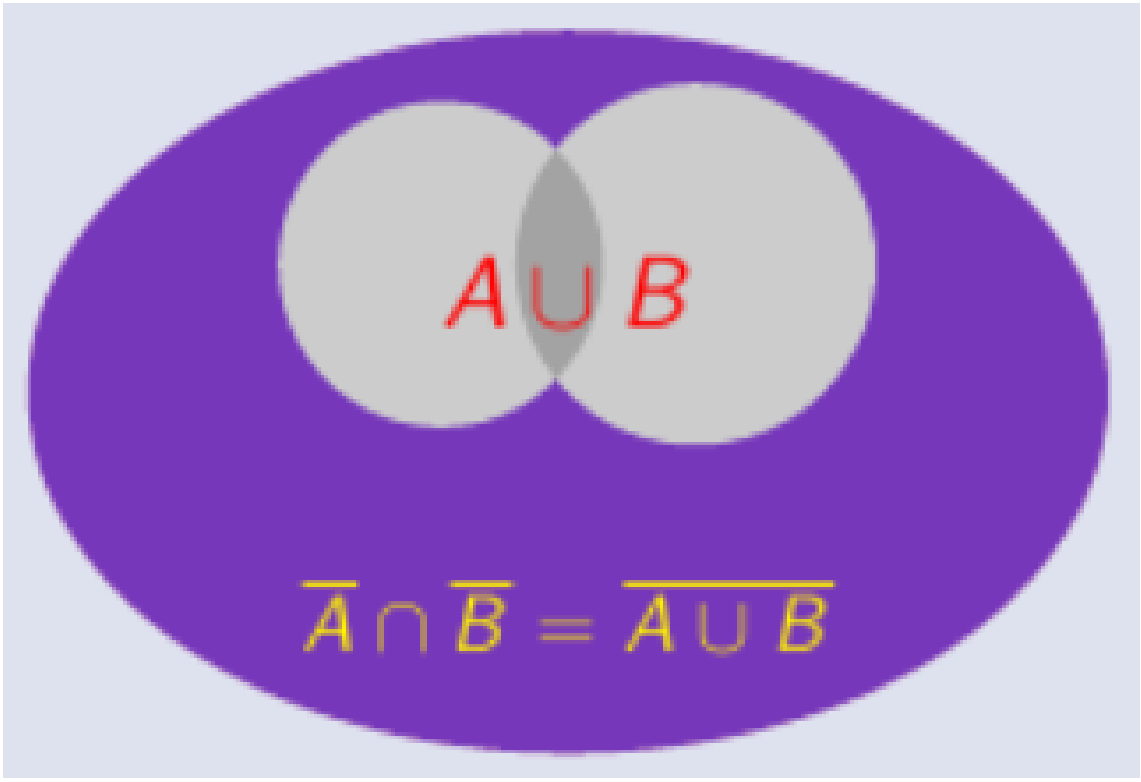
$$\begin{cases} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \end{cases}$$

↬ *Première loi de Morgan*

On a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Que l'on associe à la figure :

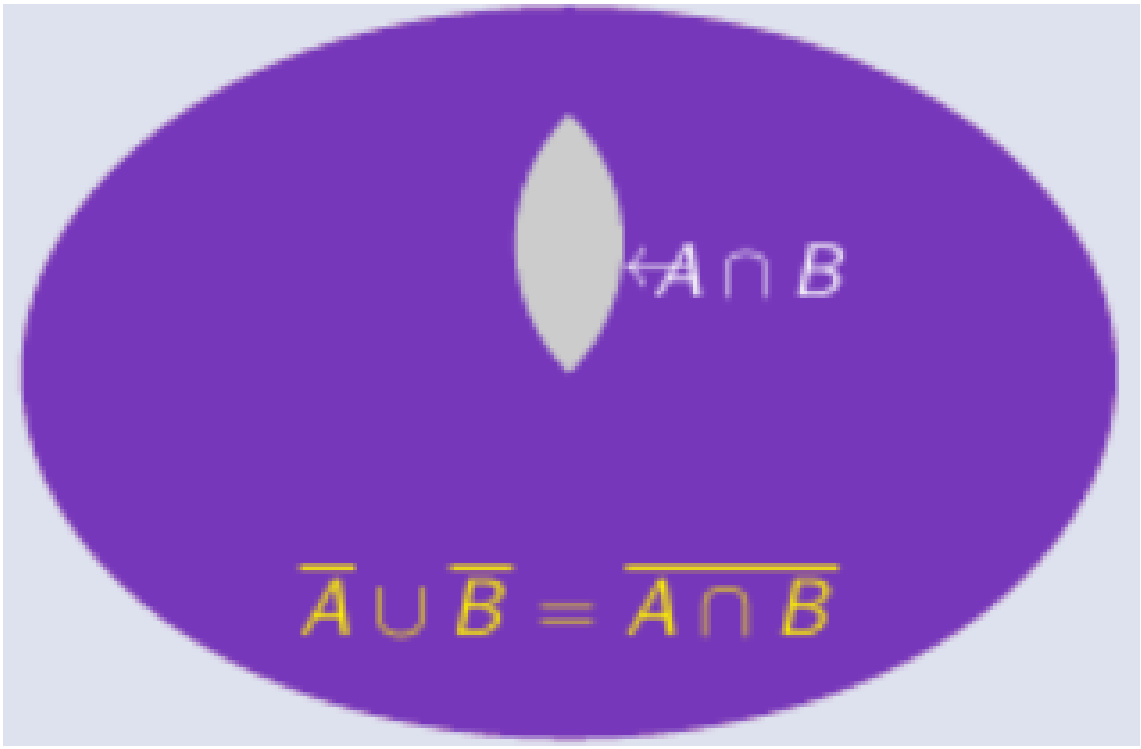


↬ *Seconde loi de Morgan*

On a :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Que l'on associe à la figure :



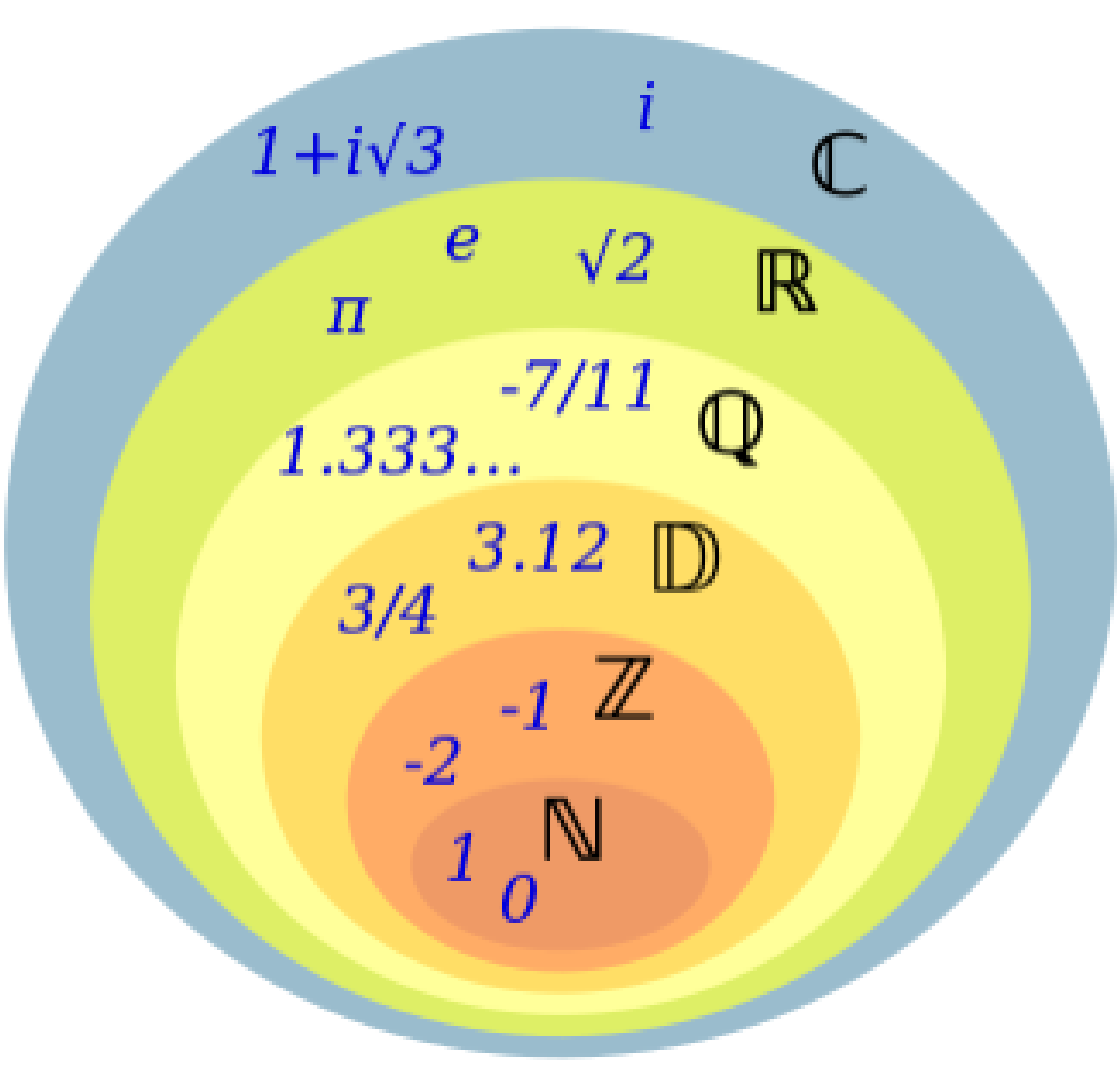
♣♣♣ Ensembles usuels

On désigne généralement les ensembles les plus usuels par une lettre à double barre. On a :

- $\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels,
- $\mathbb{N}^\star$: ensemble des nombres entiers naturels strictement positifs,
- $\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers relatifs,
- $\mathbb{Z}^\star$: ensemble des nombres entiers relatifs non nuls,
- $\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux $\left(\dfrac{n}{10^p},\ n \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N}\right)$,
- $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels $\left(\dfrac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^\star\right)$,
- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels,

- $\mathbb{R}^\star$: ensemble des nombres réels non nuls,
- $\mathbb{R}^+$: ensemble des nombres réels positifs ou nul,
- $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes $\left(a+ib,\ (a\,;\,b)\in\mathbb{R}^2,\ i^2=-1\right)$,
- $\mathbb{H}$: ensemble des nombres quaternions,
- $\mathbb{O}$: ensemble des nombres octonions,
- $\mathbb{S}$: ensemble des nombres sédénions.

Classiquement, on a les inclusions suivantes :



♣♣♣♣ Produit d'ensembles

Soit A et B deux ensembles non vides d'éléments génériques respectifs a et b. On appelle **produit cartésien** de A et B, noté $A \times B$, et que l'on doit lire A croix B, l'ensemble de tous les couples (ou duets) $(a\,;\,b)$. On a alors :

$$A \times B = \{(a\,;\,b) \,/\; a \in A,\; b \in B\}$$

Soit :

$$\big((a\,;\,b) \in (A \times B)\big) \Longleftrightarrow \big((a \in A) \wedge (b \in B)\big)$$

Si les deux ensembles A et B sont dénombrables, alors on note par $\text{card}(A)$ (qui se lit cardinal de A) le nombre d'éléments a qui constituent l'ensemble A, et par $\text{card}(B)$ (qui se lit cardinal de B)le nombre d'éléments b qui constituent l'ensemble B. Dans ce cas, on a :

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B).$$

Et bien évidemment on a $A \times \emptyset = \emptyset$. Si A est dénombrable, alors

$$\text{card}(A \times \emptyset) = \text{card}(\emptyset) = 0.$$

Prenons soins de ne **pas confondre** le couple $(a\,;\,b)$, ou l'ordre a de l'importance, avec l'ensemble $\{a\,;\,b\}$, ou l'ordre n'a pas d'importance.

Puis, on peut généraliser. Soit n en nombre entier naturel supérieur ou égal à deux. On définit le produit cartésien des n ensembles $E_1,\; E_2,\; \cdots,\; E_n$ comme

l'ensemble des n-uplets $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ où chaque x_i est un élément quelconque de E_i, avec $i = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$. On note cet ensemble produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$. Et on a :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n))\ /\ \forall i \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\},\ x_i \in E_i\}$$

Si les n ensembles sont identiques, alors on note $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = E^n$.

Si les n ensembles E_i, avec $i = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$, sont dénombrables, alors on a la relation suivante :

$$\text{card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \cdots \times \text{card}(E_n).$$

◁ : **Remarque**

- L'ensemble $i = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ peut également s'écrire $i \in [\![1\,;\,n]\!]$.

●● On rappelle que si A et B sont deux parties d'un même ensemble E alors on a :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

●●● On en déduit également que si A, B et C sont trois parties d'un même ensemble E alors on a :

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$$

●●●● Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ parties $E_1,\ E_2,\ \cdots,\ E_n$ dénombrables d'un même ensemble E lui même dénombrable. Si ces $n \in \mathbb{N}^\star$ parties $E_1,\ E_2,\ \cdots,\ E_n$ dénombrables sont **toutes disjointes deux à deux** alors :

$$\text{card}(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = \text{card}(E_1) + \text{card}(E_2) + \cdots + \text{card}(E_n)$$

Que l'on peut également écrire de manière plus abrégée comme :

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}(E_i)$$