Intégration

1 Intégrale d'une fonction en escalier.

a. Subdivision

Soit n un nombre entier naturel non nul.

On appelle $subdivision\ \sigma$ de l'intervalle réel $[a\ ;\ b]$ la donnée d'un nombre fini de points

$x_0\ ;\ \cdots\ ;\ x_n$ tel que $x_0 = a$, $x_n = b$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$.

On note par $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes des subdivisions de l'intervalle réel $[a\ ;\ b]$.

Le pas d'une subdivision $(x_i)_{i\in[\![0\ ;\ n]\!]}$ est le nombre réel $p = \max\limits_{i\in[\![0\ ;\ n-1]\!]}(x_{i+1} - x_i)$.

b. Fonction en escalier

Un fonction numérique univariée f, définie sur l'intervalle réel $[a\ ;\ b]$, est une

$fonction\ en\ escalier$ s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}$ telle que f soit constante, et égale à ℓ_i, sur chaque

intervalle ouvert $]x_i\ ;\ x_{i+1}[$.

c. Intégrale d'une fonction en escalier

On appelle $intégrale$ de la fonction en escalier f, le nombre :

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell_i(x_{i+1} - x_i)$$

Ce nombre est également noté :

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f$$

↬ **Remarques :**

Le nombre $I(f)$ est en fait une aire de rectangles. On l'exprime en unité d'aire (u.a.).

Le nombre $I(f)$ ne dépend pas de la valeur de f aux points x_i de la subdivision.

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

a. Fonction continue par morceaux

Une fonction f, définie sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, est une $fonction\ continue\ par\ morceaux$ sur $[a\,;\,b]$ s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}$ telle que f soit continue sur chaque intervalle ouvert $]x_i\,;\,x_{i+1}[$ et que f admette, en tout point de la subdivision, une limite finie à gauche et une limite finie à droite.

b. Approximation par une fonction en escalier

Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Pour tout nombre réel ε strictement positif, il existe les deux fonctions φ et ψ en escalier sur $[a\,;\,b]$ telles que :

$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$

c. Approximation par une fonction en escalier

Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Il existe un nombre réel unique I tel que, pour toutes fonctions en escaliers sur $[a\,;\,b]$ φ et ψ vérifiant $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, on ait :

$I(\varphi) \leqslant I \leqslant I(\psi)$

Ce nombre I s'appelle *l'intégrale* de f sur $[a\,;\,b]$, et se note $I(f)$, ou $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, ou $\displaystyle\int_a^b f$, ou $\displaystyle\int_{[a\,;\,b]} f$. Ce nombre dépend donc de f, de a, de b mais pas de la variable d'intégration, notée ici x. Cette variable d'intégration est dite *muette* ce qui signifie que l'on peut la noter par toute lettre non retenue pour un autre usage.

Pour $a < b$, on pose :

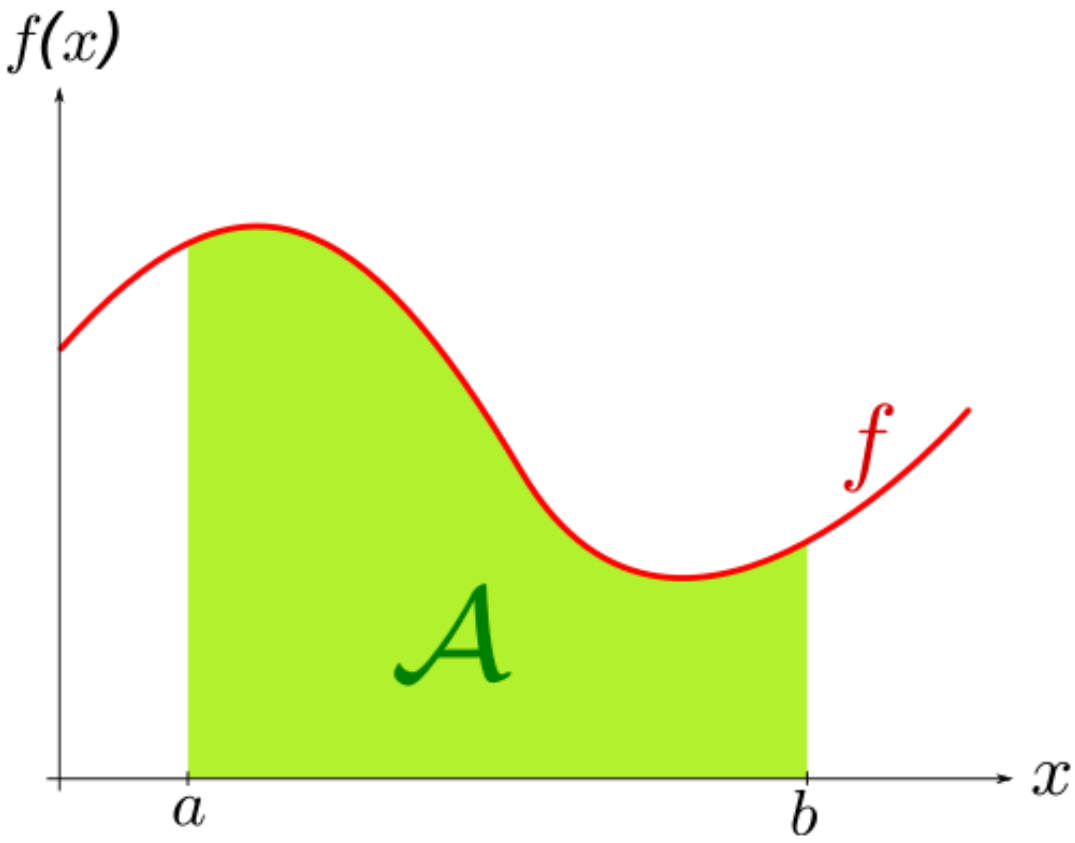
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Puis pour $c \in [a\,;\,b]$ on a :

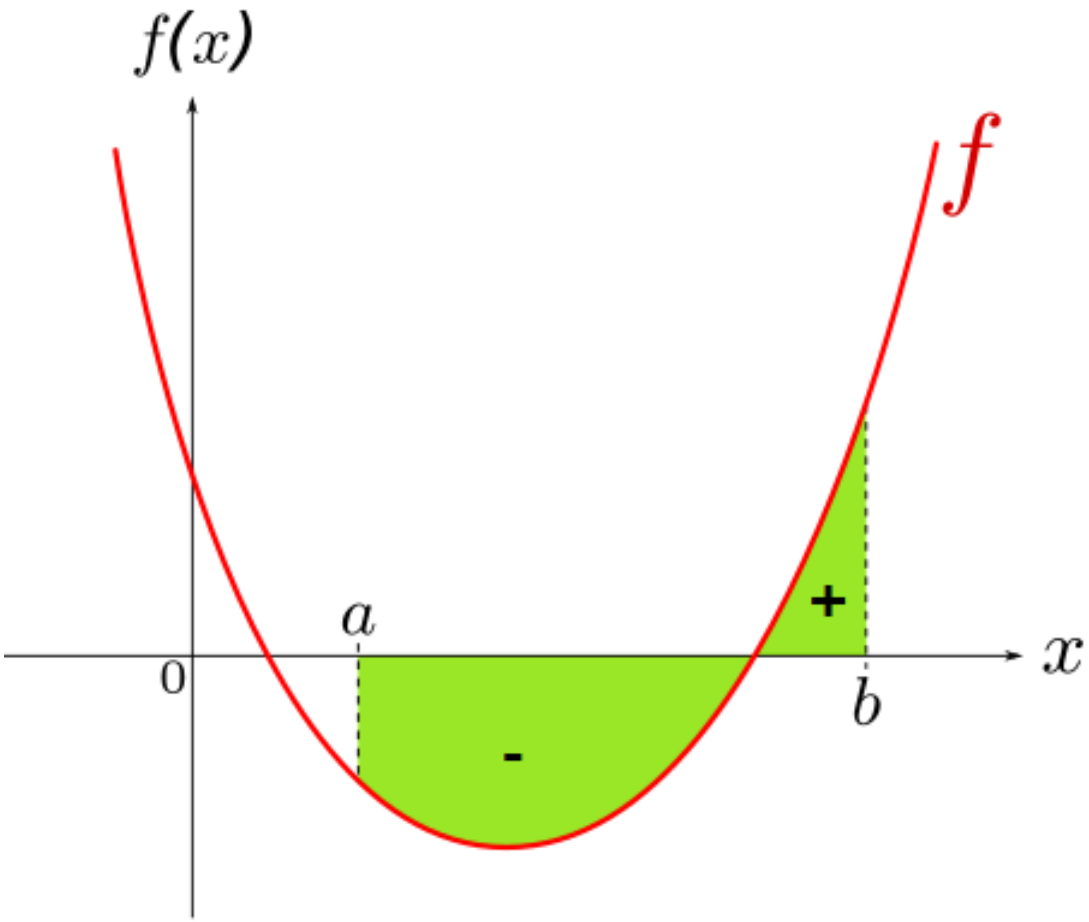
$$\int_c^c f(x)\,dx = 0$$

d. Interprétation géométrique

Le nombre réel $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan situé sous la courbe représentative de f et entre les abscisses a et b :



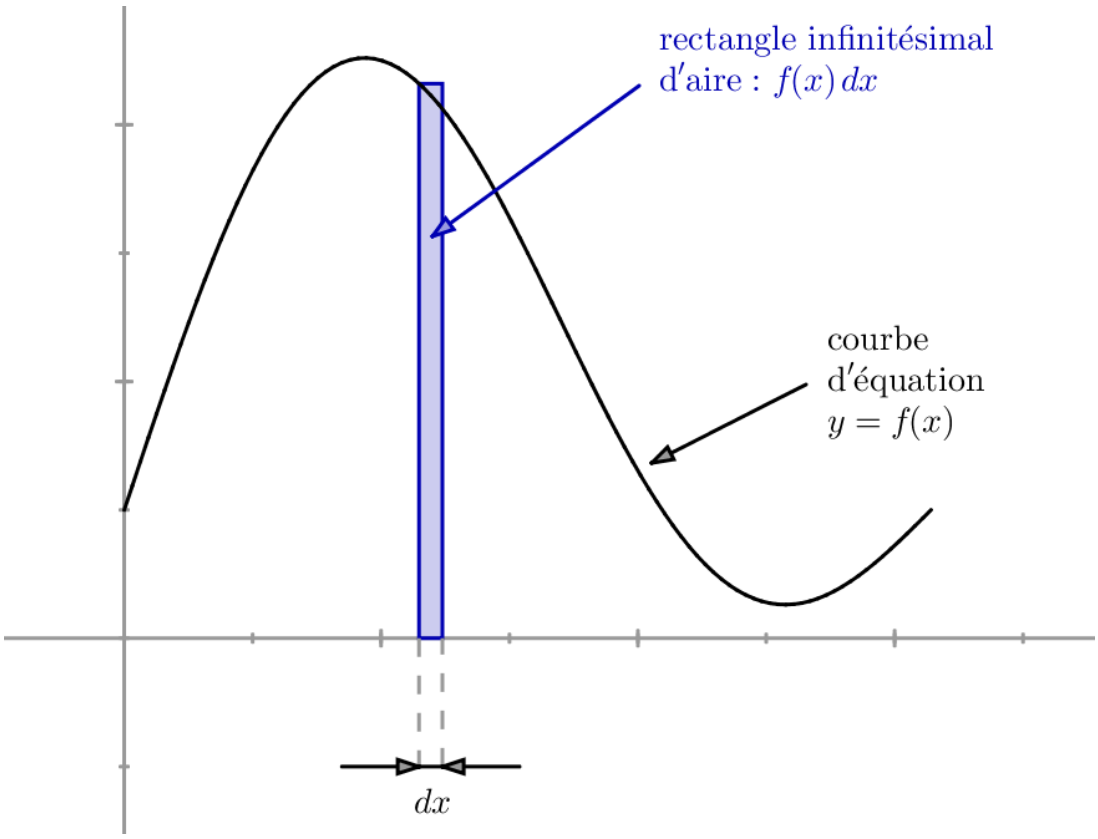
Ce nombre est compté positivement si la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses et ce nombre est compté négativement si la courbe est au-dessous de l'axe des abscisses :



Le nombre réel $\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan situé sour la courbe représentative de f et entre les abscisses a et b. En fait, ce nombre représente la somme des aires infinitésimales (infiniment petites), notée $d\mathcal{A}$, de rectangles infinitésimaux dont, à l'abscisse x, la hauteur est donnée par $f(x)$ et la largeur infinitésimale est donnée par dx. On a alors :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b d\mathcal{A} \qquad avec : d\mathcal{A} = f(x)\,dx$$

Ceci est représentée sur la figure suivante :



2 Propriétés d'une intégrale

On considère les deux fonctions numériques réelles, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui sont continues par morceaux sur les intervalles considérés.

- **Linéarité**

Soit k un nombre réel. On a :

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Et aussi :

$$\int_a^b \big(k\times f(x)\big)\,dx = k\times\int_a^b f(x)\,dx$$

• Relation de Chasles

On a la relation suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

• Relation d'ordre

– Ordre fonctionnel

Si $a < b$, et si $f \leqslant g$ sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, alors on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

– Nullité

Si f est une fonction numérique réelle, continue et **positive** sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, alors on a l'équivalence suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \iff \forall x \in [a\,;\,b],\ f(x) = 0$$

• Majoration

– Valeur absolue

Si $a < b$ alors on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

– Valeur moyenne

Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

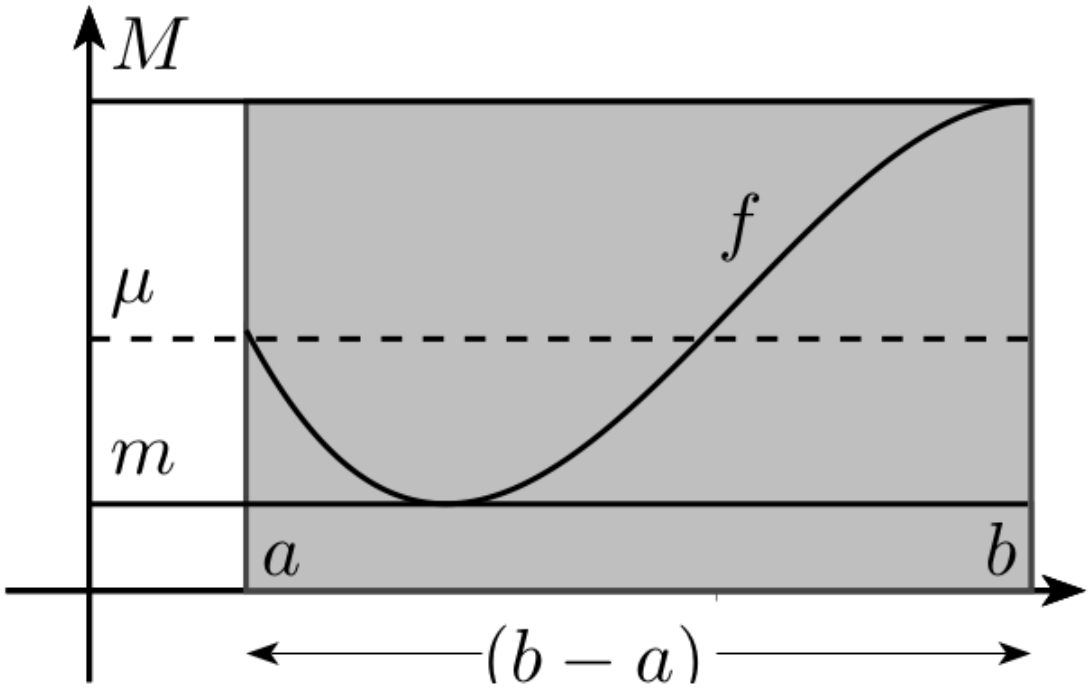
Le nombre $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ représente la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Soit m et M deux nombres réels tels que $m \leqslant M$.

Si, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[a\,;\,b]$ on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors on a :

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

Ceci s'illustre par :



– Inégalité de la valeur moyenne

Si $a < b$ alors on a :

$$\left|\int_a^b \big(f(x)\times g(x)\big)\,dx\right| \leqslant \sup_{x\in[a\,;\,b]}|f(x)| \times \int_a^b |g(x)|\,dx$$

Et en particulier si $g = 1$:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \sup_{x\in[a\,;\,b]}|f(x)| \times (b-a)$$

– Inégalité de Cauchy – Schwarz

L'application $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_a^b \big(f(x) \times g(x)\big)\,dx$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel

des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

L'inégalité de $Cauchy - Schwarz$ est la suivante :

$$\left|\int_a^b \big(f(x) \times g(x)\big)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx \times \int_a^b g^2(x)\,dx}$$

– Inégalité de Minkowski

On considère les deux fonctions réelles continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

On a l'inégalité suivante :

$$\sqrt{\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)^2\,dx} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

– Somme de Riemann

Soit n un nombre entier naturel non nul. On a l'égalité suivante :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a+i\times\frac{b-a}{n}\right)\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Plus généralement, si $\big(x_0\,;\cdots;\,x_n\big)$ est une subdivision de l'intervalle $[a\,;\,b]$ dont le pas tend

vers zéro lorsque n tend vers l'infini, et c_i un point quelconque de l'intervalle $[x_i\,;\,x_{i+1}]$, on a

alors l'égalité suivante :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\big(x_{i+1}-x_i\big)f\left(c_i\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes .

Soit i le nombre complexe qui satisfait à $i^2 = -1$.

Soit $t \longmapsto \varphi(t) = f(t) + ig(t)$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, définie sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Si les deux fonctions f et g sont continues par morceaux sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ alors la fonction φ l'est également.

L'intégrale de φ sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ est donnée par :

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + i\int_a^b g(t)\,dt$$

Toutes les propriétés de l'intégrale d'une fonction numérique continue par morceaux, à valeurs réelles, qui ont encore un sens, sont prolongées. Donc on conserve la linéarité, la relation de Chasles et la majoration du module de l'intégrale qui s'exprime comme :

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|\,dt$$

Mais **attention**, n'oubliez pas que la relation d'ordre n'a pas de sens dans $\mathbb{C}$! Ceci fait qu'il n'y a strictement aucun sens, dans $\mathbb{C}$, d'écrire $\varphi > 0$ ou $\varphi_1 > \varphi_2$.

4 Calcul numérique d'une intégrale .

Le calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est souvent très difficile, sinon impossible même. On peut cependant obtenir des valeurs approchées de I par diverses méthodes. Nous en présentons, ici, deux particulièrement simples.

- **Méthode des rectangles**

Cette méthode consiste à approcher f par une fonction en escalier (d'où l'apparition de rectangles).

On partage l'intervalle d'intégration $[a\,;\,b]$ en $n \in \mathbb{N}^\star$ segments de même longueur, notée h, et qui s'exprime comme :

$$h = \frac{b-a}{n}$$

On obtient la valeur approchée, notée $\mathcal{R}_n$, de I suivante :

$$\mathcal{R}_n = h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh)$$

Lorsque la fonction f possède une fonction dérivée f' bornée sur l'intervalle d'intégration $[a\,;\,b]$, on majore l'erreur commise, en approchant I par $\mathcal{R}_n$, par la relation suivante :

$$\left|I - \mathcal{R}_n\right| \leqslant \sup_{x\in[a\,;\,b]} |f'(x)| \times \frac{(b-a)^2}{2n}$$

Ou encore :

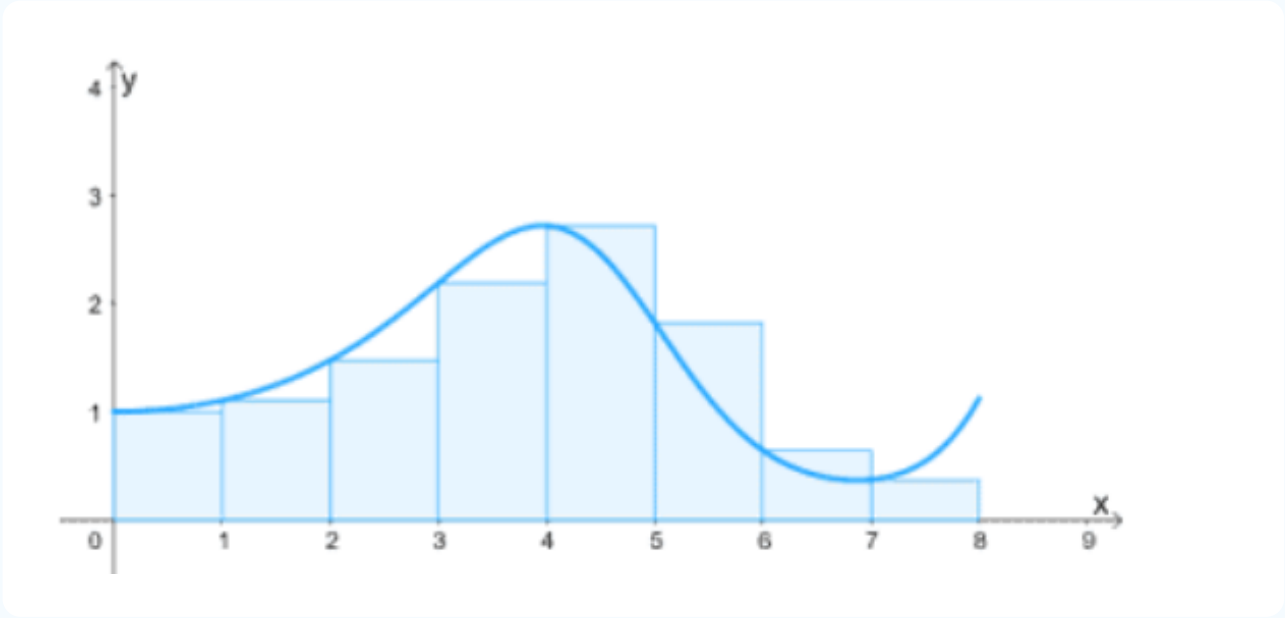
$$\left|I - \mathcal{R}_n\right| \leqslant \sup_{x\in[a\,;\,b]} |f'(x)| \times \frac{nh^2}{2}$$

Cette majoration permet, en autre, de déterminer le nombre n qui permet de satisfaire à un choix de précision souhaité au préalable.

Si f est croissante sur l'intervalle d'intégration $[a\,;\,b]$ alors l'approximation $\mathcal{R}_n$ est une valeur approchée par défaut.

Si f est décroissante sur l'intervalle d'intégration $[a\,;\,b]$ alors l'approximation $\mathcal{R}_n$ est une valeur approchée par excès.

Cette méthode des rectangles se représente par le découpage suivant $(n = 8)$:



- **Méthode des trapèzes**

Cette méthode consiste à approcher le graphique de f par une ligne polygonale (d'où l'apparition de trapèzes).

On partage l'intervalle d'intégration $[a\,;\,b]$ en $n \in \mathbb{N}^\star$ segments de même longueur, notée h, et qui s'exprime comme :

$$h = \frac{b-a}{n}$$

On obtient la valeur approchée, notée $\mathcal{T}_n$, de I suivante :

$$\mathcal{T}_n = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right)$$

Lorsque la fonction f possède une fonction dérivée seconde f'' bornée sur l'intervalle d'intégration $[a\,;\,b]$, on majore l'erreur commise, en approchant I par $\mathcal{T}_n$, par la relation suivante :

$$\left|I - \mathcal{T}_n\right| \leqslant \sup_{x\in[a\,;\,b]} |f''(x)| \times \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

Ou encore :

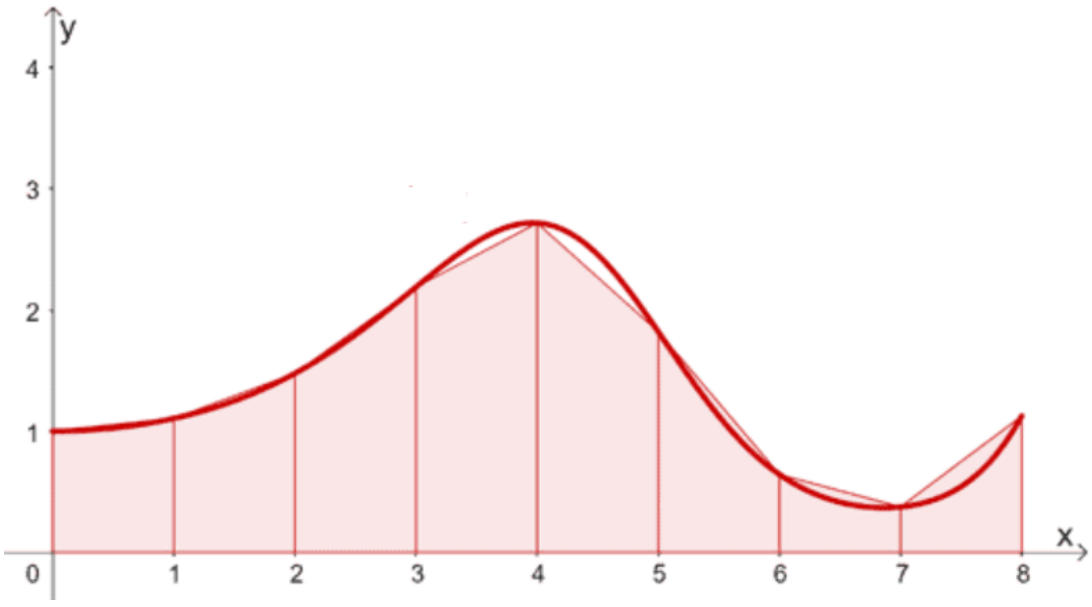
$$\left|I - \mathcal{T}_n\right| \leqslant \sup_{x\in[a\,;\,b]} |f''(x)| \times \frac{nh^3}{12}$$

Cette majoration permet, en autre, de déterminer le nombre n qui permet de satisfaire à un choix de précision souhaité au préalable.

Si f est convexe sur l'intervalle d'intégration $[a\,;\,b]$ alors $\mathcal{T}_n \geqslant I$ (l'approximation $\mathcal{T}_n$, de I, est par excès). Si la dérivée seconde f'' existe sur l'intervalle d'intégration $[a\,;\,b]$, alors f est convexe lorsque $f''(x) \geqslant 0$.

Si f est concave sur l'intervalle d'intégration $[a\,;\,b]$ alors $\mathcal{T}_n \leqslant I$ (l'approximation $\mathcal{T}_n$, de I, est par défaut). Si la dérivée seconde f'' existe sur l'intervalle d'intégration $[a\,;\,b]$, alors f est concave lorsque $f''(x) \leqslant 0$.

Cette méthode des trapèzes se représente par le découpage suivant $(n = 8)$:



- **Méthode de Thomas Simpson $(1710 - 1761)$**

Cette méthode consiste à approcher la courbe représentative de f par une succession d'arcs de paraboles d'équations $\mathcal{P}(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. A chaque fois, donc sur chaque segment de découpage, les trois coefficients réels α, β et γ se déterminent par les trois

conditions :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(début\ du\ segment) & = & \mathcal{P}(début\ du\ segment) \\ f(milieu\ du\ segment) & = & \mathcal{P}(milieu\ du\ segment) \\ f(fin\ du\ segment) & = & \mathcal{P}(fin\ du\ segment) \end{array}\right.$$

Dans cette méthode de $Simpson$, on partage l'intervalle d'intégration $[a\ ;\ b]$ en $2n$ $(n \in \mathbb{N}^{\star})$

segments de même longueur, notée h, et qui s'exprime comme :

$$h = \frac{b-a}{2n}$$

On obtient la valeur approchée, notée $\mathcal{S}_{2n}$, de I suivante :

$$\mathcal{S}_{2n} = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f\big(a+(2k+1)h\big) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\big(a+(2k)h\big)\right)$$

Lorsque la fonction f possède une fonction dérivée quatrième f'''' bornée sur l'intervalle

d'intégration $[a\ ;\ b]$, on majore l'erreur commise, en approchant I par $\mathcal{S}_{2n}$, par la relation

suivante :

$$\big|I - \mathcal{S}_{2n}\big| \leqslant \sup_{x\in[a\ ;\ b]} |f''''(x)| \times \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}$$

Ou encore :

$$\big|I - \mathcal{S}_{2n}\big| \leqslant \sup_{x\in[a\ ;\ b]} |f''''(x)| \times \frac{(2n)h^5}{180}$$

Cette majoration permet, en autre, de déterminer le nombre n qui permet de satisfaire à un

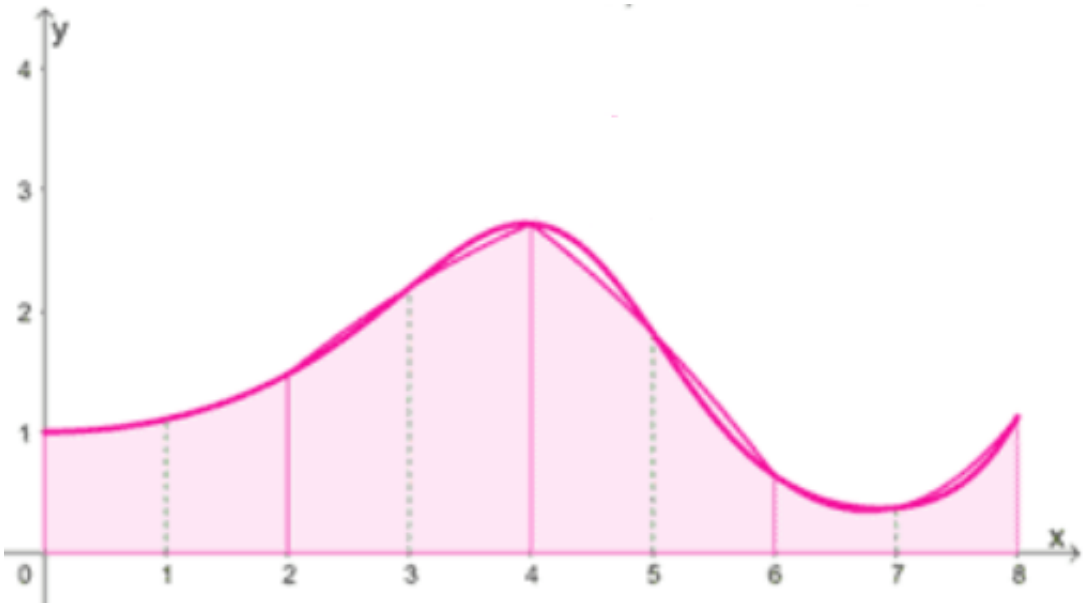
choix de précision souhaité au préalable.

Cette méthode de $Simpson$ se représente par le découpage qui est explicité sur la figure

suivante avec la situation $2n = 4$. On a donc 4 segments de découpage de l'intervalle

$[a = x_0\ ;\ b = x_8]$ qui sont $[x_0\ ;\ x_2]$, $[x_2\ ;\ x_4]$, $[x_4\ ;\ x_6]$ et $[x_6\ ;\ x_8]$, et dont les milieux respectifs

sont $x_1 = \dfrac{x_0+x_2}{2}$, $x_3 = \dfrac{x_2+x_4}{2}$, $x_5 = \dfrac{x_4+x_6}{2}$ et $x_7 = \dfrac{x_6+x_8}{2}$. D'où :


y
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x