Cours sur les primitives de fonctions rationnelles

1 Primitives de fonctions rationnelles.

a. Méthode

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$.

Toute fraction rationnelle se décompose en la somme :

- de sa partie entière (polynôme dont on connait les primitives),
- et de fractions de la forme :

$$\frac{\mathcal{A}}{(x-\alpha)^n} \quad \text{et} \quad \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} \quad (\text{avec : } p^2-4q<0)$$

Et on peut calculer les primitives de ces termes comme suit :

$$\star \int \frac{\mathcal{A}}{(x-\alpha)^n}\,dx = -\frac{\mathcal{A}}{n-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + C \quad (C \in \mathbb{R} \text{ et } n \neq 1)$$

$$\star \int \frac{\mathcal{A}}{(x-\alpha)^n}\,dx = \ln(|x-\alpha|) + C \quad (C \in \mathbb{R} \text{ et } n = 1)$$

$$\star\star \int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,dx$$

La primitive $\displaystyle\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ se calcule en utilisant le changement de variable $u = x^2+px+q$.

La primitive $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,d$ se calcule en écrivant le trinôme x^2+px+q sous sa forme canonique, puis après un changement de variable, on se ramène à une expression du type $\mathcal{I}_n = \displaystyle\int \frac{1}{(t+1)^n}\,dt$. Puis, il faut effectuer une intégration par parties de $\mathcal{I}_{n-1}$ afin d'établir une relation (de récurrence) entre $\mathcal{I}_{n-1}$ et $\mathcal{I}_n$. Enfin, il reste à déterminer, de proche en proche, la primitive recherchée $\mathcal{I}_n$ à partir de $\mathcal{I}_1 = \arctan(t) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple : Déterminons l'expression des primitives de la fonction, continue sur $\mathbb{R}$, définie par $x \longmapsto \dfrac{x^5+x^3+x+2}{x^2(x^2+x+1)}$.

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{x^5+x^3+x+2}{x^2(x^2+x+1)}$ est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{x^5+x^3+x+2}{x^2(x^2+x+1)} = x-1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2x}{x^2+x+1}$$

Donc :

$$\int \frac{x^5+x^3+x+2}{x^2(x^2+x+1)}\,dx = \frac{x^2}{2}-x-\ln(|x|)-\frac{2}{x}+\int \frac{2x}{x^2+x+1}\,dx$$

Avec :

$$\int \frac{2x}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}\,dx = \int \left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}\right)dx$$

Soit :

$$\int \frac{2x}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \ln(|x^2+x+1|) - \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

Donc, on en déduit que :

$$\int \frac{x^5+x^3+x+2}{x^2(x^2+x+1)}\,dx = \frac{x^2}{2}-x-\ln(|x|)-\frac{2}{x}+\ln(|x^2+x+1|)-\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

Avec :

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{x^2+2x\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\,dx = \int \frac{1}{x^2+2x\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

En faisant usage de l'identité remarquable usuelle, on obtient :

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

On pose $t = x+\dfrac{1}{2}$ ainsi on a $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$. On en déduit alors que $dt = dx$, et de fait, on trouve que :

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \int \frac{1}{\frac{3}{4}\frac{4}{3}t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \frac{1}{\frac{3}{4}}\int \frac{1}{\frac{4}{3}t^2+1}\,dt = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2+1}\,dt$$

Ce qui peut également s'écrire comme :

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2+1}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2+1}\,d\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)$$

On pose alors $X = \dfrac{2}{\sqrt{3}}t$ de sorte que nous puissions écrire, avec $C \in \mathbb{R}$, que :

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{X^2+1}\,dX = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(X) + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) + C$$

Mais comme $t = x + \dfrac{1}{2}$ cela permet d'écrire que :

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C$$

Soit encore :

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Finalement, on trouve que :

$$\int \frac{x^5+x^3+x+2}{x^2(x^2+x+1)}\,dx = \frac{x^2}{2} - x - \ln(|x|) - \frac{2}{x} + \ln(|x^2+x+1|) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Au passage, mentionnons que nous avons montré que, si a est un nombre réel et b un nombre réel non nul, alors :

$$\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

2 Autres primitives se ramenant aux fonctions rationnelles.

a. Primitives de fractions rationnelles en sinus et cosinus

Méthode : On veut déterminer $\displaystyle\int f(x)\,dx$ où f est une fonction rationnelle en $\sin(x)$ et $\cos(x)$. Dans le cas où :

$\star$ le terme $f(x)\,dx$ est invariant lors du changement de x en $-x$ alors on pose $u = \cos(x)$;

$\star\star$ le terme $f(x)\,dx$ est invariant lors du changement de x en $\pi - x$ alors on pose $u = \sin(x)$;

$\star\star\star$ le terme $f(x)\,dx$ est invariant lors du changement de x en $\pi + x$ alors on pose $u = \tan(x)$.

Sinon, il est toujours possible de poser $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Dans ce cas, on a $x = 2\arctan(u)$, et de fait :

$$\frac{dx}{du} = \frac{d}{du}(2\arctan(u)) = 2\frac{d}{du}(\arctan(u)) = 2 \times \frac{1}{1+u^2} \iff dx = \frac{1}{1+u^2}\,du$$

Les règles précédentes sont connues sous le nom de $\mathbf{règle\ de\ Charles\ Bioche\ (1859 - 1949)}$.

Exemple : Déterminons l'expression des primitives de la fonction f définie par $f : x \longmapsto \dfrac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}$.

On change x en $-x$, et on constate que :

$$f(-x)\,d(-x) = \frac{\sin^3(-x)}{1+\cos^2(-x)}\,d(-x) = -\frac{\sin^3(-x)}{1+\cos^2(-x)}\,dx = -\frac{-\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = f(x)\,dx$$

Donc on pose $u = \cos(x)$, ce qui implique que :

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x) \iff du = -\sin(x)\,dx$$

Ainsi :

$$\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)}\sin(x)\,dx = -\int \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos^2(x)}\big(-\sin(x)\,dx\big) = -\int \frac{1-u^2}{1+u^2}\,du$$

Ce qui nous donne :

$$\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = -\int \frac{1-u^2}{1+u^2}\,du = -\int \frac{1-u^2+1-1}{1+u^2}\,du = -\int \frac{2-(1+u^2)}{1+u^2}\,du$$

Soit :

$$\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = -\int \left(\frac{2}{1+u^2} - \frac{1+u^2}{1+u^2}\right)du = -2\int \frac{1}{1+u^2}\,du + \int \frac{1+u^2}{1+u^2}\,du$$

Soit encore :

$$\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = -2\int \frac{1}{1+u^2}\,du + \int 1\,du$$

On a alors :

$$\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = -2\arctan(u) + u + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Finalement, on trouve que :

$$\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = -2\arctan\big(\cos(x)\big) + \cos(x) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

b. Primitives de fractions rationnelles en sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique

Méthode : Les changements de variable $u = e^x$ ou $u = e^{-x}$ et dans le cas hyperbolique, $t = \tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)$, conduisent au calcul de primitives de fractions rationnelles. Dans certains cas, des changements de variables $u = \cosh(x)$, $u = \sinh(x)$ ou $u = \tanh(x)$, peuvent-être envisagés.

Exemple : Déterminons les primitives de $x \longmapsto \dfrac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}e^x$. On pose $u = e^x$, donc $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$. Donc $du = e^x\,dx$. On a donc :

$$\int \frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}e^x\,dx = \int \frac{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-1}{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+1}e^x\,dx = \int \frac{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-\dfrac{2}{2}}{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+\dfrac{2}{2}}e^x\,dx = \int \frac{e^x+e^{-x}-2}{e^x+e^{-x}+2}e^x\,dx$$

Soit :

$$\int \frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}e^x\,dx = \int \frac{e^x+\dfrac{1}{e^x}-2}{e^x+\dfrac{1}{e^x}+2}e^x\,dx = \int \frac{u+\dfrac{1}{u}-2}{u+\dfrac{1}{u}+2}\,du = \int \frac{\dfrac{u^2}{u}+\dfrac{1}{u}-\dfrac{2u}{u}}{\dfrac{u^2}{u}+\dfrac{1}{u}+\dfrac{2u}{u}}\,du$$

Ce qui nous donne :

$$\int \frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}e^x\,dx = \int \frac{u^2-2u+1}{u^2+2u+1}\,du = \int \frac{u^2-2u+1}{(u+1)^2}\,du$$

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{u^2-2u+1}{(u+1)^2}$ nous permet d'écrire que :

$$\int \frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}e^x\,dx = \int \left(1-\frac{4}{u+1}+\frac{4}{(u+1)^2}\right)du = \int 1\,du - 4\int \frac{1}{u+1}\,du + 4\int \frac{1}{(u+1)^2}\,du$$

Avec $C \in \mathbb{R}$, on obtient alors :

$$\int \frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}e^x\,dx = u - 4\ln(|\,u+1\,|) + 4 \times \frac{-1}{u+1} + C$$

Soit :

$$\int \frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}e^x\,dx = u - \ln\left((u+1)^4\right) - \frac{4}{u+1} + C$$

Finalement, on trouve que :

$$\int \frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}e^x\,dx = e^x - \ln\left((e^x+1)^4\right) - \frac{4}{e^x+1} + C \quad (\text{avec : } C \in \mathbb{R})$$