Cours sur les primitives (IPP, changement de variables, Taylor Lagrange avec reste intégral)

1 Primitives d'une fonction continue.

a. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une fonction F, définie sur un intervalle I, est une **primitive** de f si elle est dérivable sur I et si :

$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$

b. Théorèmes

Théorème 1

Deux primitives de f diffèrent d'une constante. C'est-à-dire que si F est une primitive de f sur un intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $x \longmapsto F(x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Théorème 2

Si f est une fonction continue sur un intervalle I contenant a, alors la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f. C'est d'ailleurs **l'unique** primitive qui s'annule en $x = a$. On note par $\displaystyle\int f(t)\,dt$ ou $\displaystyle\int f$ une primitive quelconque de f.

Théorème 3

Pour toute primitive $\mathcal{F}$ de f sur un intervalle I contenant a et x, on a :

$$\int_a^x f(t)\,dt = \left[\mathcal{F}(t)\right]_a^x = \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(a)$$

Le calcul d'intégrales de fonctions continues se ramène don à la recherche de primitives.

Théorème 4

Pour toute fonction f de classe C^1 sur un intervalle I contenant a et x, on a :

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

2 Méthodes de calcul.

a. Linéarité

Théorème 5

Si F et G sont des primitives respectives de f et g sur un intervalle I et k est un nombre réel, alors $F+G$ est la

primitive de $f+G$ et kF est la primitive de kf sur ce même intervalle I.

Retenons les relations trigonométriques utiles à cet usage . Ces relations se retrouvent à l'aide de la linérisation.

$\star\ \cos^2(x) = \frac{1}{2}\big(1+\cos(2x)\big)$

$\star\star\ \sin^2(x) = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big)$

$\star\star\star\ \cos^3(x) = \frac{1}{4}\big(3\cos(x)+\cos(3x)\big)$

$\star\star\star\star\ \sin^3(x) = \frac{1}{4}\big(3\sin(x)-\sin(3x)\big)$

Exemple : Déterminons les primitives de $x \longmapsto \sin^4(x)$. On a :

$$\sin^4(x) = \sin^2(x)\times\sin^2(x) = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big)\times\frac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big) = \frac{1}{4}\big(1-\cos(2x)\big)^2$$

Donc :

$$\sin^4(x) = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right) = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2x) + \frac{1}{2}\left(1 + \cos(4x)\right)\right)$$

D'où :

$$\sin^4(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos(4x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$$

Ainsi, on en déduit que :

$$\int \sin^4(x)\,dx = \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)\right)\,dx = \frac{3}{8}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{8}\int \cos(4x)\,dx$$

Ce qui nous donne, avec $K \in \mathbb{R}$:

$$\int \sin^4(x)\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{8} \times \frac{1}{4}\sin(4x) + K$$

Finalement :

$$\int \sin^4(x)\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + K$$

b. Intégration par parties.

Théorème 6

Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I, et a et b deux éléments réels de I tels que $a < b$. On a alors :

$$\int_a^b u'(t) \times v(t)\,dt = \left[u(t) \times v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t) \times v'(t)\,dt$$

On écrit également :

$$\int u'(t) \times v(t)\,dt = u(t) \times v(t) - \int u(t) \times v'(t)\,dt$$

▼ Cas classiques d'utilisation :

On note par P est un polynôme, α est un nombre réel non nul et β est un nombre réel quelconque. On a :

$\star$ Pour $\displaystyle\int_a^b P(t) \times \sin(\alpha t + \beta)\,dt$ on pose $v(t) = P(t)$ et $u'(t) = \sin(\alpha t + \beta)$.

$\star\star$ Pour $\displaystyle\int_a^b P(t) \times \cos(\alpha t + \beta)\,dt$ on pose $v(t) = P(t)$ et $u'(t) = \cos(\alpha t + \beta)$.

$\star\star\star$ Pour $\displaystyle\int_a^b P(t) \times e^{\alpha t + \beta}\,dt$ on pose $v(t) = P(t)$ et $u'(t) = e^{\alpha t + \beta}$.

$\star\star\star\star$ Pour $\displaystyle\int_a^b P(t) \times \ln(t)\,dt$ on pose $v(t) = \ln(t)$ et $u'(t) = P(t)$.

$\star\star\star\star\star$ Pour $\displaystyle\int_a^b e^{\alpha t} \times \cos(\beta t)\,dt$ on effectue deux intégrations par parties en posant à chaque fois $v(t) = e^{\alpha t}$ afin de faire apparaître cette même intégrale.

$\star\star\star\star\star\star$ Pour $\displaystyle\int_a^b e^{\alpha t} \times \sin(\beta t)\,dt$ on effectue deux intégrations par parties en posant à chaque fois $v(t) = e^{\alpha t}$ afin de faire apparaître cette même intégrale.

Il est également possible d'écrire, avec $i^2 = -1$, que :

$$\int_a^b e^{\alpha t} \times \cos(\beta t)\,dt = \Re\acute{e}\left(\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)t}\,dt\right) = \Re\acute{e}\left(\left[\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}}{\alpha+i\beta}\right]_a^b\right)$$

et

$$\int_a^b e^{\alpha t} \times \sin(\beta t)\,dt = \Im m\left(\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)t}\,dt\right) = \Im m\left(\left[\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}}{\alpha+i\beta}\right]_a^b\right)$$

Ceci repose sur le fait que :

$$\int_a^b \Re\acute{e}\left(f(t)\right)\,dt = \Re\acute{e}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) \quad \text{et} \quad \int_a^b \Im m\left(f(t)\right)\,dt = \Im m\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)$$

Exemple : Déterminons les primitives de $x \longmapsto x\sin(2x+3)$ sur $\mathbb{R}$.

On va dériver l'expression x et intégrer l'expression $\sin(2x+3)$ pour obtenir $-\dfrac{1}{2}\cos(2x+3)$. On a alors :

$$\int x\sin(2x+3) = x \times \left(-\frac{1}{2}\cos(2x+3)\right) - \int \left(1 \times \left(-\frac{1}{2}\cos(2x+3)\right)\right)\,dx$$

Soit :

$$\int x\sin(2x+3) = -\frac{x}{2}\cos(2x+3) + \frac{1}{2}\int \cos(2x+3)\,dx$$

Soit encore :

$$\int x\sin(2x+3) = -\frac{x}{2}\cos(2x+3) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sin(2x+3) + K \quad (K \in \mathbb{R})$$

Finalement :

$$\int x\sin(2x+3) = -\frac{x}{2}\cos(2x+3) + \frac{1}{4}\sin(2x+3) + K \quad (K \in \mathbb{R})$$

a. Intégration par changement de variable

Définition : Soit u une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ inclus dans l'intervalle $[a\,;\,b]$ et f une fonction continue sur cet intervalle "plus large" $[a\,;\,b]$. Dans ce cas :

$$\int_\alpha^\beta f\big(u(t)\big)\,u'(t)\,dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,dx$$

Si u est une fonction bijective, alors u admet une fonction réciproque notée $\mathcal{R}_u$. Et on a alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\mathcal{R}_u(a)}^{\mathcal{R}_u(a)} f\big(u(t)\big)\,u'(t)\,dt$$

Car en posant $x = u(t)$ on a alors $dx = u'(t)\,dt$.

Par exemple déterminons la primitive de $x \longmapsto \sin^4(x)\cos(x)$. On recherche donc :

$$\int \sin^4(x)\cos(x)\,dx$$

On pose $u = \sin(x)$ ce qui implique que :

$$u' = \frac{du}{dx} = \cos(x)$$

Ce qui nous permet d'écrire que :

$$du = \cos(x)\,dx$$

On a alors :

$$\int \sin^4(x)\cos(x)\,dx = \int u^4\,du = \frac{1}{5}u^5 + K \quad \text{avec : } K \in \mathbb{R}$$

Finalement :

$$\int \sin^4(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{5}\sin^5(x) + K$$

Dans le cas d'une intégrale, nous allons illuster la méthode. En effet, déterminons la valeur numérique de l'intégrale $\mathcal{I}$ suivante :

$$\mathcal{I} = \int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

Posons $t = 1 + \sqrt{x}$. Ceci nous donne $x = (t-1)^2$.

On vérifie bien que, sur l'intervalle d'intégration $[1\,;\,4]$, la fonction $g : x \longmapsto (x-1)^2$ est bien la réciproque de $f : x \longmapsto 1+\sqrt{x}$ qui est une bijection. Graphiquement on a une symétrie de f et g par rapport à la première bissectrice $h : x \longmapsto x$:

Donc, on a :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left((t-1)^2\right) = 2(t-1) \quad \Longleftrightarrow \quad dx = 2(t-1)\,dt$$

Lorsque $x = 1$ on constate que $t = 1 + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$, puis lorsque $x = 4$ on constate que

$t = 1 + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3.$

Dans ce cas, l'intégrale $\mathcal{I}$ cherchée devient :

$$\mathcal{I} = \int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{t}\,2(t-1)\,dt$$

Ce qui nous donne :

$$\mathcal{I} = 2\int_2^3 \frac{t-1}{t}\,dt = 2\int_2^3 \left(\frac{t}{t} - \frac{1}{t}\right)\,dt = 2\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t}\right)\,dt = 2\left(\int_2^3 1\,dt - \int_2^3 \frac{1}{t}\,dt\right)$$

Donc :

$$\mathcal{I} = 2\left([t]_2^3 - [\ln(t)]_2^3\right) = 2\left((3-2) - (\ln(3) - \ln(2))\right) = 2\left(1 + \ln(2) - \ln(3)\right)$$

Finalement :

$$\mathcal{I} = 2\left(1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) \quad u.a. \simeq 1,189 \ u.a.$$

On rappelle que $u.a.$ signifie $u$nité d'$a$ire et fait référence à l'interprétation géométrique de l'intégrale (qui est égale à la valeur numérique de la surface entre la courbe de la fonction intégrée, l'axe des abscisses et les deux axes verticaux correspondants aux deux bornes de l'intégrale). Graphiquement, on obtient :

3 Formule de Taylor avec reste intégral.

a. Définition

Soit n un nombre entier naturel.

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I.

Soient x_0 et x deux éléments de l'intervalle I.

On a la formule suivante :

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \int_x^{x_0} \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Le terme en rouge $f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\dfrac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\cdots+\dfrac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)=P_n(x)$ s'appelle l' **approximation de Taylor** à l'ordre n. Puis le terme en bleu $\displaystyle\int_x^{x_0}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt=R_n(x)$ s'appelle le **reste intégral** à l'ordre n.

Le terme en rouge est celui qui est utilisé par les physiciens pour effectuer un développement limité de f au voisinage de x_0 à l'ordre n. Le physicien n'utilise pas le reste.

4 Inégalité de Taylor-Lagrange.

a. Définition

Soit n un nombre entier naturel.

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I.

On suppose qu'il existe un nombre réel $A>0$ tel que, pour tout élément x de l'intervalle I, on ait $\left|\ f^{(n+1)}(x)\ \right|\leqslant A$.

Dans ce cas, on a la majoration suivante du reste intégral :

$$|\,R_n(x)\,|\leqslant A\frac{|\,x-x_0\,|^{n+1}}{(n+1)!}$$