Cours : La méthode de la variation de la constante

1 La méthode de la variation de la constante.

a. Rappels historiques .

La **méthode de variation de la constante**, parfois également appelée méthode de **Lagrange**,

est une méthode pour déterminer les solutions d'une équation différentielle avec second membre, connaissant les solutions de l'équation homogène (sans second membre).

La méthode a été inventée par le mathématicien et physicien **Pierre-Simon de Laplace**, pour la

résolution des équations différentielles linéaires. Elle tire son nom de ce que, pour l'essentiel, elle consiste à chercher les solutions sous une forme analogue à celle déjà trouvée pour une équation associée plus simple, mais en remplaçant la ou les constantes de cette solution par de nouvelles fonctions inconnues. Pour être précis, la méthode a été initiée par le Mathématicien franco-italien

Joseph Louis Lagrange et inventée et généralisée par le mathématicien et physicien

Pierre-Simon de Laplace, pour la résolution des équations différentielles linéaires.

b. Principe de la méthode .

▼▼ Principe de la méthode

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre, avec second membre, suivante :

$$a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = c(x)$$

La solution globale recherchée y est la somme de la solution homogène y_h et de la solution particulière y_p.

Soit :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

♣ Recherche de la solution homogène

On considère l'équation différentielle homogène associée :

$$a(x)\,y_h'(x) + b(x)\,y_h(x) = 0$$

Qui va s'écrire :

$$a(x)\,y_h'(x) = -b(x)\,y_h(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y_h'(x)}{y_h(x)} = -\frac{b(x)}{a(x)}$$

En intégrant, on trouve que :

$$\int \frac{y_h'(x)}{y_h(x)}\,dx = -\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx \quad \Longleftrightarrow \quad \ln y_h(x) + C_1 = -\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx$$

Avec C_1 qui est une constante. En prenant l'exponentielle de cette égalité, on trouve que :

$$e^{\ln y_h(x) + C_1} = e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx} \quad \Longleftrightarrow \quad y_h(x)e^{C_1} = e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx}$$

Ce qui nous donne encore :

$$y_h(x) = e^{-C_1}\,e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx} \quad \Longleftrightarrow \quad y_h(x) = C\,e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx}$$

Avec $C = e^{-C_1}$ qui est une constante non nulle. Soit F la primitive présente dans l'exponentielle. On note donc :

$$F(x) = \int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx \quad \Longleftrightarrow \quad F'(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$$

Ce qui nous donne l'écriture suivante de $y_h(x)$:

$$\boxed{y_h(x) = C\,e^{-F(x)}}$$

♣ Recherche de la solution particulière

Pour trouver la solution particulière y_p on va utiliser la méthode dite de **la variation de la constante**.

L'idée est de "supposer" que la solution particulière y_p doit être "assez proche" de la forme de la solution homogène y_h car provenant de l'équation différentielle homogène de la même équation différentielle linéaire. C'est une méthode souvent qualifiée de **méthode à la physicienne**.

Afin de rester "proche" de la forme de la solution particulière y_p, on rend la **constante variable** $C = C(x)$; d'où le nom de la méthode.

Ainsi, on pose donc :

$$y_p(x) = C(x)\,e^{-F(x)}$$

Dès lors, on a :

$$y_p'(x) = C'(x)\, e^{-F(x)} - C(x)\, F'(x)\, e^{-F(x)}$$

Donc, l'équation différentielle linéaire du premier ordre, avec second membre, devient :

$$a(x)\, \left[C'(x)\, e^{-F(x)} - C(x)\, F'(x)\, e^{-F(x)}\right] + b(x)\, C(x)\, e^{-F(x)} = c(x)$$

Soit encore :

$$a(x)\, C'(x)\, e^{-F(x)} - a(x)\, C(x)\, F'(x)\, e^{-F(x)} + b(x)\, C(x)\, e^{-F(x)} = c(x)$$

Or, on sait que $(e^{-F(x)})' = -F'(x)\, e^{-F(x)}$. Ce qui nous permet d'écrire l'équation (13) sous la forme suivante :

$$a(x)\, C'(x)\, e^{-F(x)} + a(x)\, C(x)\, (e^{-F(x)})' + b(x)\, C(x)\, e^{-F(x)} = c(x)$$

En factorisant par $C(x)$ on obtient :

$$a(x)\, C'(x)\, e^{-F(x)} + C(x)\, \left[a(x)\, (e^{-F(x)})' + b(x)\, e^{-F(x)}\right] = c(x) \qquad (\star)$$

Mais $y_h(x) = C\, e^{-F(x)}$ est solution de l'équation différentielle homogène associée, à savoir :

$$a(x)\, (C\, e^{-F(x)})' + b(x)\, C\, e^{-F(x)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad C\, \left[a(x)\, (e^{-F(x)})' + b(x)\, e^{-F(x)}\right] = 0$$

Comme C est non nulle, cela signifie que :

$$a(x)\, (e^{-F(x)})' + b(x)\, e^{-F(x)} = 0$$

Donc on obtient :

$$a(x)\, C'(x)\, e^{-F(x)} + C(x)\, 0 = c(x) \quad \Longleftrightarrow \quad a(x)\, C'(x)\, e^{-F(x)} = c(x)$$

Ainsi l'équation $(\star)$ devient :

$$C'(x)\, e^{-F(x)} = \frac{c(x)}{a(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad C'(x) = \frac{c(x)}{a(x)\, e^{-F(x)}} \quad \Longleftrightarrow \quad C'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}\, e^{F(x)}$$

En intégrant, on trouve que :

$$C(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)}\, e^{F(x)}\, dx$$

Ainsi, la solution particulière prend la forme suivante :

$$\boxed{y_p(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)}\, e^{F(x)}\, dx\ \ e^{-F(x)}}$$

♣ Recherche de la solution globale

La solution globale y de l'équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre est donc, par linéarité, la somme des deux trouvé précédemment :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

A savoir :

$$y(x) = C\, e^{-F(x)} + \int \frac{c(x)}{a(x)}\, e^{F(x)}\, dx\ e^{-F(x)}$$

Finalement, en factorisant par le terme $e^{-F(x)}$, on obtient le résultat souhaité :

$$\boxed{y(x) = \left(C + \int \frac{c(x)}{a(x)}\, e^{F(x)}\, dx\right)\, e^{-F(x)}}$$

ou encore :

$$\boxed{y(x) = \left(C + \int \frac{c(x)}{a(x)}\, e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx}\, dx\right)\, e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx}}$$

Dans les trois processus de **primitivation** présents, il faut mettre les constantes d'intégration à zéro.

La constante C présente dans la solution générale y sera à déterminer à l'aide d'une condition particulière ou une condition initiale.
Vous allez mettre ceci en application !