# Fractions rationnelles et leurs décompositions

## 1 Fractions rationnelles et leurs décompositions.

### a. Introduction et hypothèse

Une fraction rationnelle se présente sous la forme $\frac{P}{Q}$, où $P$ et $Q$ sont deux polynômes, et $Q$ est non nul.

Si $\deg(P) > \deg(Q)$ on peut alors réaliser la division de $P$ par $Q$, suivant les puissances décroissantes, pour faire apparaître une partie entière, qui est un polynôme $E$, et une nouvelle fraction rationnelle $\frac{P_1}{Q}$, avec cette fois la condition $\deg(P_1) < \deg(Q)$. Dans ce cas, on a :

$$P = QE + P_1$$

Soit :

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{P_1}{Q}$$

L'objectif est de savoir décomposer, en éléments simples, la fraction rationnelle $\frac{P_1}{Q}$.

C'est pourquoi nous allons nous intéresser à la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ avec la condition $\deg(P) < \deg(Q)$. On suppose de plus que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est **irréductible**. En outre, nous ferons l'hypothèse que les coefficients de $P$ et $Q$ sont réels.

On appelle **pôle** de la fraction rationnelle, toute valeur de l'indéterminée $X$ qui annule le dénominateur $Q$. Les pôles peuvent être réels ou complexes. Autrement dit, les pôles de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ sont les racines du dénominateur $Q$.

### b. Cas des pôles réels et décomposition en éléments simples de première espèce

Si $a$ est une racine de $Q$, alors $Q(a) = 0$.

Si cette racine $a$ est d'ordre de multiplicité $m$, alors $Q$ peut se mettre sous la forme

$Q = (X - a)^m Q_1$.

Dans ce cas on a :

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{(X-a)^m Q_1} \quad \text{avec} : Q_1(a) \neq 0$$

De plus, comme la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est **irréductible** cela implique que $P$ n'est pas factorisable par $X - a$, et de fait $a$ n'est pas une racine de $P$, donc

$P(a) \neq 0$.

Et on a la décomposition suivante :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{P(X)}{(X-a)^m Q_1(X)} = \frac{A_1}{(X-a)^m} + \frac{A_2}{(X-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_m}{X-a} + \frac{R(X-a)}{Q_1(X)} \quad \text{avec} : \deg(R) < \deg(Q_1)$$

La première partie s'appelle **la partie principale** relative au pôle $a$. Il s'agit d'un polynôme de degré $m$ en $\frac{1}{X-a}$, le terme final est **une fraction rationnelle** qui

n'admet pas $a$ comme pôle. Les nombres réels $A_1, A_2, \cdots, A_m$ sont à déterminer.

Par exemple, si on multiplie $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ par $(X-a)^m$, alors on obtient :

$$\frac{(X-a)^m P(X)}{Q(X)} = \frac{P(X)}{Q_1(X)} = A_1 + A_2(X-a) + \cdots + A_m(X-a)^{m-1} + \frac{(X-a)^m R(X-a)}{Q_1(X)}$$

Puis, en posant $X = a$, il reste donc :

$$\frac{P(a)}{Q_1(a)} = A_1$$

Exemple 1: Par exemple, on considère la fraction rationnelle

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{X}{X^5 - 3X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 3X - 1}.$$

Le dénominateur $Q = X^5 - 3X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 3X - 1$ présente une racine

réelle de multiplicité triple qui est $X = 1$. Et on a alors :

$$Q = X^5 - 3X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3(X^2+1) \implies Q_1(X) = X^2 + 1$$

Et de fait :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{X}{X^5 - 3X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 3X - 1} = \frac{X}{(X-1)^3(X^2+1)}$$

La décomposition de $F$ en éléments simples est alors donnée par l'expression :

$$F = \frac{X}{(X-1)^3(X^2+1)} = \frac{A_1}{X-1} + \frac{A_2}{(X-1)^2} + \frac{A_3}{(X-1)^3} + \frac{\alpha X + \beta}{X^2+1}$$

En multipliant par $(X-1)^3$, on trouve :

$$(X-1)^3F = \frac{X}{X^2+1} = A_1(X-1)^2 + A_2(X-1) + A_3 + \frac{(X-1)^3(\alpha X+\beta)}{X^2+1}$$

Puis, en posant $X=1$, on obtient :

$$\frac{1}{2} = 0+0+A_3+0 \iff A_3 = \frac{1}{2}$$

Puis, en posant successivement $X=0$, $X=-1$, $X=2$ et $X=-2$, on obtient un système simple qui conduit rapidement à :

$$A_1 = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad A_2 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = \beta = \frac{1}{4}$$

De fait, on trouve finalement que :

$$\boxed{\frac{X}{X^5-3X^4+4X^3-4X^2+3X-1} = -\frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{2(X-1)^3} + \frac{X+1}{4(X^2+1)}}$$

Dans le cas ou la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ admet $\ell \in \mathbb{N}^\star$ pôles réels différents, notés $a_1, a_2, \cdots, a_\ell$, et de multiplicité respective $m_1, m_2, \cdots, m_\ell$, alors on a la décomposition suivante :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{P}{Q} &= \frac{A_{11}}{(X-a_1)^{m_1}} + \frac{A_{12}}{(X-a_1)^{m_1-1}} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{X-a_1} \\ &+ \frac{A_{21}}{(X-a_2)^{m_2}} + \frac{A_{22}}{(X-a_2)^{m_2-1}} + \cdots + \frac{A_{2m_2}}{X-a_2} \\ &\vdots \\ &+ \frac{A_{\ell 1}}{(X-a_\ell)^{m_\ell}} + \frac{A_{\ell 2}}{(X-a_\ell)^{m_\ell-1}} + \cdots + \frac{A_{\ell m_\ell}}{X-a_\ell}\end{aligned}}$$

Les $m_1+m_2+\cdots+m\ell$ coefficients $A_{ij}$ sont des nombres réels à déterminer.

Cette décomposition est **unique**.

**Exemple 2:** Par exemple, on considère la fraction rationnelle

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{X+3}{X^3+4X^2+5X+2}.$$

Le dénominateur $Q = X^3+4X^2+5X+2$ présente deux racines réelles, qui sont

$X = -1$ de multiplicité 2, et $X = -2$ de multiplicité 1. Et on a alors :

$$Q = \big(X-(-1)\big)^2\big(X-(-2)\big) = (X+1)^2(X+2)$$

Et de fait :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)}$$

La décomposition de $F$ en éléments simples est alors donnée par l'expression :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{A_1}{X+1} + \frac{A_2}{(X+1)^2} + \frac{A_3}{X+2} \quad (A_1\,;\,A_2\,;\,A_3) \in \mathbb{R}^3$$

On va multiplier $F$ par $(X+1)^2$, on a alors :

$$(X+1)^2F = \frac{(X+1)^2P}{Q} = \frac{X+3}{(X+2)} = A_1(X+1) + A_2 + \frac{A_3(X+1)^2}{X+2}$$

On pose alors $X = -1$, et on obtient :

$$\frac{-1+3}{(-1+2)} = A_1(-1+1) + A_2 + \frac{A_3(-1+1)^2}{X+2} \iff \frac{2}{1} = 0 + A_2 + 0$$

Soit :

$$A_2 = 2$$

On va maintenant multiplier $F$ par $X+2$, on a alors :

$$(X+2)F = \frac{(X+2)P}{Q} = \frac{X+3}{(X+1)^2} = \frac{A_1(X+2)}{X+1} + \frac{2(X+2)}{(X+1)^2} + A_3$$

Puis on pose $X = -2$. On a alors :

$$\frac{-2+3}{(-2+1)^2} = \frac{A_1(-2+2)}{X+1} + \frac{2(-2+2)}{(X+1)^2} + A_3 \iff \frac{1}{(-1)^2} = 0 + 0 + A_3 \iff \frac{1}{1} = A_3$$

Soit :

$$A_3 = 1$$

Donc :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{A_1}{X+1} + \frac{2}{(X+1)^2} + \frac{1}{X+2}$$

Dans cette expression, posons $X = 0$, on trouve alors que :

$$F(0) = \frac{P(0)}{Q(0)} = \frac{0+3}{(0+1)^2(0+2)} = \frac{A_1}{0+1} + \frac{2}{(0+1)^2} + \frac{1}{0+2} \iff \frac{3}{1\times 2} = \frac{A_1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{1}{2}$$

Soit :

$$A_1 = \frac{3}{2} - 2 - \frac{1}{2} \iff A_1 = \frac{2}{2} - 2 \iff A_1 = 1 - 2 \iff A_1 = -1$$

Finalement, on trouve que :

$$\boxed{F = \frac{X+3}{X^3+4X^2+5X+2} = \frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = -\frac{1}{X+1} + \frac{2}{(X+1)^2} + \frac{1}{X+2}}$$

### c. Cas général d'une décomposition en éléments simples (D.E.S)

Nous allons maintenant décrire la méthodologie générale à une décomposition en élément simples d'une fraction rationnelle $F$.

Soit $F = \frac{N}{D}$ une fraction rationnelle, $N$ et $D$ sont deux polynômes de l'indéterminée

$X$.

### ◇ Si $\deg(N) \geqslant \deg(D)$

Alors on réalise la division euclidienne du dividende $N$ par le diviseur $D$. Notons respectivement par $Q$ et $R$ le quotient et le reste de cette division euclidienne. On obtient alors :

$$N = DQ + R$$

Soit :

$$F = \frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}$$

Dans ce cas $Q$ est la partie entière de la fraction rationnelle $F$ et $\frac{R}{D}$ est la partie fractionnaire (parfois appelée partie polaire) de la fraction rationnelle $F$. La partie fractionnaire $\frac{R}{D}$ est telle que $\deg(R) < \deg(D)$.

Ensuite, on décompose en éléments simples la La partie fractionnaire $\frac{R}{D}$ comme expliqué dans le point ci dessous.

### ◇◇ Si $\deg(N) < \deg(D)$

Alors on factorise le dénominateur $D$. Suivant que la factorisation se déroule dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ la procédure est légèrement différente. De manière générale, on a :

♠ $Dans\ \mathbb{R}$ :

Notons par $a_1, a_2, \cdots, a_n$, les $n \in \mathbb{N}^\star$ différentes racines réelles du dénominateur $D$, dont les multiplicités respectives sont notées $m_1, m_2, \cdots, m_n$. Il est toujours

possible, avec $\alpha \in \mathbb{R}^\star$, de mettre $D$ sous la forme :

$$D = \alpha \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{k} (X^2 + \gamma_j X + \beta_j)^{p_j}$$

Les coefficients $\gamma_j$ et $\beta_j$ (avec $j \in [\![1\,;\,k]\!]$) sont tous réels et doivent vérifier la condition suivante :

$\forall j \in [\![1\,;\,k]\!],\ \gamma_j^2 - 4\beta_j < 0$

Cette condition permet simplement de s'assurer que les $k \in \mathbb{N}$ polynômes du second degré $X^2 + \gamma_j X + \beta_j$ soit non factorisable dans $\mathbb{R}$.

♠♠ $Dans\ \mathbb{C}$ :

Notons par $c_1, c_2, \cdots, c_n$, les $n \in \mathbb{N}^\star$ différentes racines complexes du dénominateur $D$, dont les multiplicités respectives sont notées $m_1, m_2, \cdots, m_n$. Il est toujours possible, avec $\alpha \in \mathbb{C}^\star$, de mettre $D$ sous la forme :

$$D = \alpha \prod_{i=1}^{n} (X - c_i)^{m_i}$$

Puis, à ce stade, il ne nous reste plus qu'à écrire formellement la décomposition en éléments simples. Suivant que l'on travaille dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la forme de la décomposition en éléments simples est donnée par :

♠ $Dans\ \mathbb{R}$ :

On conserve les mêmes notations.

Notons par $a_1, a_2, \cdots, a_n$, les $n \in \mathbb{N}^\star$ différentes racines réelles du dénominateur $D$, dont les multiplicités respectives sont notées $m_1, m_2, \cdots, m_n$. Il est toujours

possible, avec $\alpha \in \mathbb{R}^\star$.

La fraction rationnelle $F$ s'écrit comme :

$$F = Q + \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{m_i} \frac{r_{ij}}{(X - a_i)^j} \right) + \sum_{i=1}^{k} \left( \sum_{j=1}^{p_i} \frac{\varepsilon_{ij} X + \mu_{ij}}{(X^2 + \alpha_j X + \beta_j)^j} \right)$$

Les coefficients $r_{ij}$, $\varepsilon_{ij}$ et $\mu_{ij}$ sont tous des nombres réels, et ceci quelque soit las valeurs des indices $i$ et $j$. Par des méthodes diverses il faut tous les déterminer.

♠♠ $Dans\ \mathbb{C}$ :

On conserve les mêmes notations.

Notons par $c_1, c_2, \cdots, c_n$, les $n \in \mathbb{N}^\star$ différentes racines complexes du dénominateur $D$, dont les multiplicités respectives sont notées $m_1, m_2, \cdots, m_n$. Il est toujours possible, avec $\alpha \in \mathbb{C}^\star$.

La fraction rationnelle $F$ s'écrit comme :

$$F = Q + \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{m_i} \frac{r_{ij}}{(X - c_i)^j} \right)$$

Les coefficients $r_{ij}$ sont tous des nombres complexes, et ceci quelque soit las valeurs des indices $i$ et $j$. Par des méthodes diverses il faut tous les déterminer.

Remarque

◁ **Remarque finale :**

La technique de décomposition en éléments simples est particulièrement efficace pour

intégrer (ou primitiver) des fractions rationnelles. Elle est donc indispensable aux mathématiciens, mais également au physicien ainsi qu'au chimiste.