Fractions rationnelles et leurs décompositions

1 Fractions rationnelles et leurs décompositions.

a. Introduction et hypothèse

Une fraction rationnelle se présente sous la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont deux polynômes, et Q est non nul.

Si $\deg(P) > \deg(Q)$ on peut alors réaliser la division de P par Q, suivant les puissances décroissantes, pour faire apparaître une partie entière, qui est un polynôme E, et une nouvelle fraction rationnelle $\frac{P_1}{Q}$, avec cette fois la condition $\deg(P_1) < \deg(Q)$. Dans ce cas, on a :

$$P = QE + P_1$$

Soit :

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{P_1}{Q}$$

L'objectif est de savoir décomposer, en éléments simples, la fraction rationnelle $\frac{P_1}{Q}$.

C'est pourquoi nous allons nous intéresser à la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ avec la condition $\deg(P) < \deg(Q)$. Cela signifie que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est **irréductible**. En outre, nous ferons l'hypothèse que les coefficients de P et Q sont réels.

On appelle **pôle** de la fraction rationnelle, toute valeur de l'indéterminée X qui annule le dénominateur Q. Les pôles peuvent être réels ou complexes. Autrement dit, les pôles de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ sont les racines du numérateur Q.

b. Cas des pôles réels et décomposition en éléments simples de première espèce

Si a est une racine de Q, alors $Q(a) = 0$.

Si cette racine a est d'ordre de multiplicité m, alors Q peut se mettre sous la forme $Q = (X - a)^m Q_1$.

Dans ce cas on a :

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{(X-a)^m Q_1} \quad \text{avec : } Q_1(a) \neq 0$$

De plus, comme la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est **irréductible** cela implique que P n'est pas factorisable par $X-a$, et de fait a n'est pas une racine de P, donc $P(a) \neq 0$.

Et on a la décomposition suivante :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{P(X)}{(X-a)^m Q_1(X)} = \frac{A_1}{(X-a)^m} + \frac{A_2}{(X-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_m}{X-a} + \frac{R(X-a)}{Q_1(X)} \quad \text{avec : } \deg(R) < \deg(Q_1)$$

La première partie s'appelle **la partie principale** relative au pôle a. Il s'agit d'un polynôme de degré m, le terme final est **une fraction rationnelle** qui n'admet pas a comme pôle. Les nombres réels $A_1, A_2, \cdots, A_m$ sont à déterminer. Par exemple, si on multiplie $\frac{P(X)}{Q(X)}$ par $(X-a)^m$, alors on obtient :

$$\frac{(X-a)^m P(X)}{Q(X)} = \frac{P(X)}{Q_1(X)} = A_1 + A_2(X-a) + \cdots + A_m(X-a)^{m-1} + \frac{(X-a)^m R(X-a)}{Q_1(X)}$$

Puis, en posant $X = a$, il reste donc :

$$\frac{P(a)}{Q_1(a)} = A_1$$

Exemple 1: Par exemple, on considère la fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q} = \frac{X}{X^5 - 3X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 3X - 1}$.

Le dénominateur $Q = X^5 - 3X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 3X - 1$ présente une racine réelle de multiplicité triple qui est $X = 1$.

Et on a alors :

$$Q = X^5 - 3X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3(X^2+1) \implies Q_1(X) = X^2 + 1$$

Et de fait :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{X}{X^5 - 3X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 3X - 1} = \frac{X}{(X-1)^3(X^2+1)}$$

La décomposition de F en éléments simples est alors donnée par l'expression :

$$F = \frac{X}{(X-1)^3(X^2+1)} = \frac{A_1}{X-1} + \frac{A_2}{(X-1)^2} + \frac{A_3}{(X-1)^3} + \frac{\alpha X + \beta}{X^2+1}$$

En multipliant par $(X-1)^3$, on trouve :

$$(X-1)^3 F = \frac{X}{X^2+1} = A_1(X-1)^2 + A_2(X-1) + A_3 + \frac{(X-1)^3(\alpha X + \beta)}{X^2+1}$$

Puis, en posant $X = 1$, on obtient :

$$\frac{1}{2} = 0 + 0 + A_3 + 0 \iff A_3 = \frac{1}{2}$$

Puis, en posant successivement $X = 0$, $X = -1$, $X = 2$ et $X = -2$, on obtient un système simple qui conduit rapidement à :

$$A_1 = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad A_2 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = \beta = \frac{1}{4}$$

De fait, on trouve finalement que :

$$\boxed{\frac{X}{X^5 - 3X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 3X - 1} = -\frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{2(X-1)^3} + \frac{X+1}{4(X^2+1)}}$$

Dans le cas ou la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ admet $\ell \in \mathbb{N}^\star$ pôles réels différents, notés $a_1, a_2, \cdots, a_\ell$, et de multiplicité respective $m_1, m_2, \cdots, m_\ell$, alors on a la décomposition suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{P}{Q} &= \frac{A_{11}}{(X-a_1)^{m_1}} + \frac{A_{12}}{(X-a_1)^{m_1-1}} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{X-a_1} \\ &+ \frac{A_{21}}{(X-a_2)^{m_2}} + \frac{A_{22}}{(X-a_2)^{m_2-1}} + \cdots + \frac{A_{2m_2}}{X-a_2} \\ &\vdots \\ &+ \frac{A_{\ell 1}}{(X-a_\ell)^{m_\ell}} + \frac{A_{\ell 2}}{(X-a_\ell)^{m_\ell-1}} + \cdots + \frac{A_{\ell m_\ell}}{X-a_\ell} \end{aligned}}$$

Les $m_1 + m_2 + \cdots + m\ell$ coefficients A_{ij} sont des nombres réels à déterminer. Cette décomposition est **unique**.

Exemple 2: Par exemple, on considère la fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q} = \frac{X+3}{X^3 + 4X^2 + 5X + 2}$.

Le dénominateur $Q = X^3 + 4X^2 + 5X + 2$ présente deux racines réelles, qui sont $X = -1$ de multiplicité 2, et $X = -2$ de multiplicité 1. Et on a alors :

$$Q = \big(X - (-1)\big)^2 \big(X - (-2)\big) = (X+1)^2 (X+2)$$

Et de fait :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)}$$

La décomposition de F en éléments simples est alors donnée par l'expression :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{A_1}{X+1} + \frac{A_2}{(X+1)^2} + \frac{A_3}{X+2} \quad (A_1\,;\,A_2\,;\,A_3) \in \mathbb{R}^3$$

On va multiplier F par $(X+1)^2$, on a alors :

$$(X+1)^2F = \frac{(X+1)^2P}{Q} = \frac{X+3}{(X+2)} = A_1(X+1) + A_2 + \frac{A_3(X+1)^2}{X+2}$$

On pose alors $X=-1$, et on obtient :

$$\frac{-1+3}{(-1+2)} = A_1(-1+1) + A_2 + \frac{A_3(-1+1)^2}{X+2} \iff \frac{2}{1} = 0 + A_2 + 0$$

Soit :

$$A_2 = 2$$

On va maintenant multiplier F par $X+2$, on a alors :

$$(X+2)F = \frac{(X+2)P}{Q} = \frac{X+3}{(X+1)^2} = \frac{A_1(X+2)}{X+1} + \frac{2(X+2)}{(X+1)^2} + A_3$$

Puis on pose $X=-2$. On a alors :

$$\frac{-2+3}{(-2+1)^2} = \frac{A_1(-2+2)}{X+1} + \frac{2(-2+2)}{(X+1)^2} + A_3 \iff \frac{1}{(-1)^2} = 0 + 0 + A_3 \iff \frac{1}{1} = A_3$$

Soit :

$$A_3 = 1$$

Donc :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{A_1}{X+1} + \frac{2}{(X+1)^2} + \frac{1}{X+2}$$

Dans cette expression, posons $X=0$, on trouve alors que :

$$F(0) = \frac{P(0)}{Q(0)} = \frac{0+3}{(0+1)^2(0+2)} = \frac{A_1}{0+1} + \frac{2}{(0+1)^2} + \frac{1}{0+2} \iff \frac{3}{1\times 2} = \frac{A_1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{1}{2}$$

Soit :

$$A_1 = \frac{3}{2} - 2 - \frac{1}{2} \iff A_1 = \frac{2}{2} - 2 \iff A_1 = 1 - 2 \iff A_1 = -1$$

Finalement, on trouve que :

$$\boxed{F = \frac{X+3}{X^3+4X^2+5X+2} = \frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = -\frac{1}{X+1} + \frac{2}{(X+1)^2} + \frac{1}{X+2}}$$

c. Cas général d'une décomposition en éléments simples (D.E.S)

Nous allons maintenant décrire la méthodologie générale à une décomposition en élément simples d'une fraction rationnelle F.

Soit $F = \dfrac{N}{D}$ une fraction rationnelle, N et D sont deux polynômes de l'indéterminée X.

◇ Si $\deg(N) \geqslant \deg(D)$

Alors on réalise la division euclidienne du dividende N par le diviseur D. Notons respectivement par Q et R le quotient et le reste de cette division euclidienne. On obtient alors :

$$N = DQ + R$$

Soit :

$$F = \frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}$$

Dans ce cas Q est la partie entière de la fraction rationnelle F et $\dfrac{R}{D}$ est la partie fractionnaire (parfois appelée partie polaire) de la fraction rationnelle F. La partie fractionnaire $\dfrac{R}{D}$ est telle que $\deg(R) < \deg(D)$.

Ensuite, on décompose en éléments simples la La partie fractionnaire $\dfrac{R}{D}$ comme expliqué dans le point ci dessous.

◇◇ Si $\deg(N) < \deg(D)$

Alors on factorise le dénominateur D. Suivant que la factorisation se déroule dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ la procédure est légèrement différente. De manière générale, on a :

♠ $Dans\ \mathbb{R}$:

Notons par $a_1, a_2, \cdots, a_n$, les $n \in \mathbb{N}^\star$ différentes racines réelles du dénominateur D, dont les multiplicités respectives sont notées $m_1, m_2, \cdots, m_n$. Il est toujours possible, avec $\alpha \in \mathbb{R}^\star$, de mettre D sous la forme :

$$D = \alpha \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{k} (X^2 + \gamma_j X + \beta_j)^{p_j}$$

Les coefficients γ_j et β_j (avec $j \in [\![1\,;\,k]\!]$) sont tous réels et doivent vérifier la condition suivante :

$$\forall j \in [\![1\,;\,k]\!],\ \ \gamma_j^2 - 4\beta_j < 0$$

Cette condition permet simplement de s'assurer que les $k \in \mathbb{N}$ polynômes du second degré $X^2 + \gamma_j X + \beta_j$ soit non factorisable dans $\mathbb{R}$.

♠♠ $Dans\ \mathbb{C}$:

Notons par $c_1, c_2, \cdots, c_n$, les $n \in \mathbb{N}^\star$ différentes racines complexes du dénominateur D, dont les multiplicités respectives sont notées $m_1, m_2, \cdots, m_n$. Il est toujours possible, avec $\alpha \in \mathbb{C}^\star$, de mettre D sous la forme :

$$D = \alpha \prod_{i=1}^{n} (X - c_i)^{m_i}$$

Puis, à ce stade, il ne nous reste plus qu'à écrire formellement la décomposition en éléments simples. Suivant que l'on travaille dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la forme de la décomposition en éléments simples est donnée par :

♠ $Dans$ $\mathbb{R}$:

On conserve les mêmes notations.

Notons par $a_1, a_2, \cdots, a_n$, les $n \in \mathbb{N}^\star$ différentes racines réelles du dénominateur D, dont les multiplicités respectives sont notées $m_1, m_2, \cdots, m_n$. Il est toujours possible, avec $\alpha \in \mathbb{R}^\star$.

La fraction rationnelle F s'écrit comme :

$$F = Q + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{r_{ij}}{(X - a_i)^j} \right) + \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{p_i} \frac{\varepsilon_{ij} X + \mu_{ij}}{(X^2 + \alpha_j X + \beta_j)^j} \right)$$

Les coefficients r_{ij}, ε_{ij} et μ_{ij} sont tous des nombres réels, et ceci quelque soit las valeurs des indices i et j. Par des méthodes diverses il faut tous les déterminer.

♠♠ $Dans$ $\mathbb{C}$:

On conserve les mêmes notations.

Notons par $c_1, c_2, \cdots, c_n$, les $n \in \mathbb{N}^\star$ différentes racines complexes du dénominateur D, dont les multiplicités respectives sont notées $m_1, m_2, \cdots, m_n$. Il est toujours possible, avec $\alpha \in \mathbb{C}^\star$.

La fraction rationnelle F s'écrit comme :

$$F = Q + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{r_{ij}}{(X - c_i)^j} \right)$$

Les coefficients r_{ij} sont tous des nombres complexes, et ceci quelque soit las valeurs des indices i et j. Par des méthodes diverses il faut tous les déterminer.

◁ Remarque finale :

La technique de décomposition en éléments simples est particulièrement efficace pour intégrer (ou primitiver) des fractions rationnelles. Elle est donc indispensable aux mathématiciens, mais également au physicien ainsi qu'au chimiste.