Résolutions des équations algébriques

1 Résolutions des équations algébriques.

a. Définition

On considère les quatre nombres complexes a, b, c et d.

▼ Equation du premier degré

L'équation $az + b = 0$, avec $a \neq 0$, admet une racine $z = -\dfrac{b}{a}$.

▼▼ Equation du deuxième degré

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$, ainsi que $\Delta = \delta^2$, avec $\delta \in \mathbb{C}$.

♦ Si δ est nul

Alors dans ce cas il n'y a qu'une seule racine, dite double, et qui est : $z = \dfrac{-b}{2a}$.

♦♦ Si δ est non nul

Alors dans ce cas il y a deux racines distinctes, et qui sont : $z = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z = \dfrac{-b-\delta}{2a}$.

▼▼▼ Equation du troisième degré

On considère l'équation $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, avec $a \neq 0$.

On commence par diviser cette équation par $a \neq 0$, et on obtient :

$$z^3 + \frac{b}{a}z^2 + \frac{c}{a}z + \frac{d}{a} = 0$$

Puis, on pose $z = x - \dfrac{b}{3a}$ afin d'éliminer le terme de degré 2. On a alors :

$$\left(x - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(x - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(x - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0$$

On aboutit alors à :

$$x^3+px+q=0 \quad \text{avec :} \left\{\begin{array}{lcl} p & = & \dfrac{3ac-b^2}{3a^2} \\ q & = & \dfrac{2b^3}{27a^3}-\dfrac{bc}{a^2}+\dfrac{d}{a} \end{array}\right.$$

La méthode de $Cardan$ (mais elle fut découverte par $Niccolò\, Fontana$ dit $Tartaglia$ en 1535) conciste à poser

$x=u+v$. On obtient alors :

$u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0$

Et cette égalité est vérifiée si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u^3+v^3 & = & -q \\ uv & = & -\dfrac{p}{3} \end{array}\right.$$

La dernière relation est équivalente à $u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}$.

On connais donc la somme $S=u^3+v^3$ ainsi que le produit $P=u^3\times v^3$. Donc, u^3 et v^3 sont donc solution de de

l'équation du second degré, de l'inconnue t, suivante :

$$t^2+St+P=0 \iff t^2+(u^3+v^3)t+u^3v^3=0 \iff t^2-qt-\frac{p^3}{27}=0$$

Le discriminant associé est alors $q^2+\dfrac{4p^3}{27}$ et suivant son signe, on aura des racines réelles ou non.

Dans le cas particulier ou p et q sont deux nombres réels, on a toujours l'existence d'au moins une racine réelle. On a alors :

↬ 1er cas : si $q^2+\dfrac{4p^3}{27}>0$

Dans ce cas l'équation $t^2-qt-\dfrac{p^3}{27}=0$ à deux racines réelles distinctes, notées t_1 et t_2, qui sont les expressions

de u^3 et v^3, et de fait on en déduit les expressions respectives de u et v :

$$\left\{\begin{array}{lclcccl} t_1 & = & u^3 & = & \dfrac{q+\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}}{2} & = & -\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}} \\ t_2 & = & v^3 & = & \dfrac{q-\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}}{2} & = & -\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u & = & \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}} \\ v & = & \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}} \end{array}\right.$$

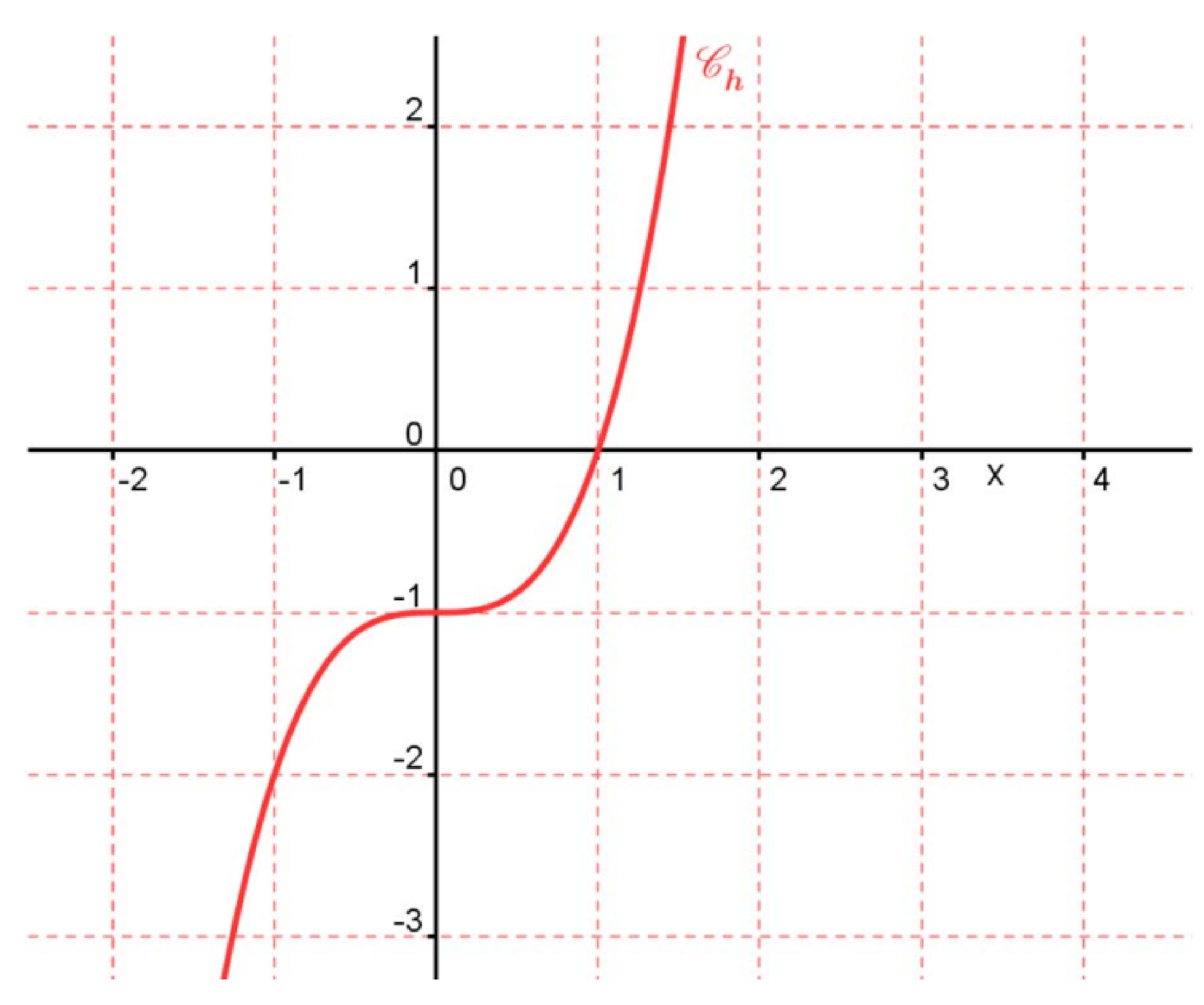
L'équation $x^3+px+q=0$ à trois racines. Dans notre cas, l'une est réelle $x_1=u+v$, et les deux autres x_2 et x_3 sont complexes conjuguées l'une de l'autre $\overline{x_2}=x_3$. Ce qui implique que :

$$x_1=u+v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\in\mathbb{R}$$

Ceci nous permet d'écrire que la solution réelle de l'équation initiale $az^3+bz^2+cz+d=0$ est z_1 et est donnée par :

$$z_1=x_1-\frac{b}{3a}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\frac{b}{3a}$$

C'est le cas pour le polynôme h d'expression X^3-1 dont le graphe est :

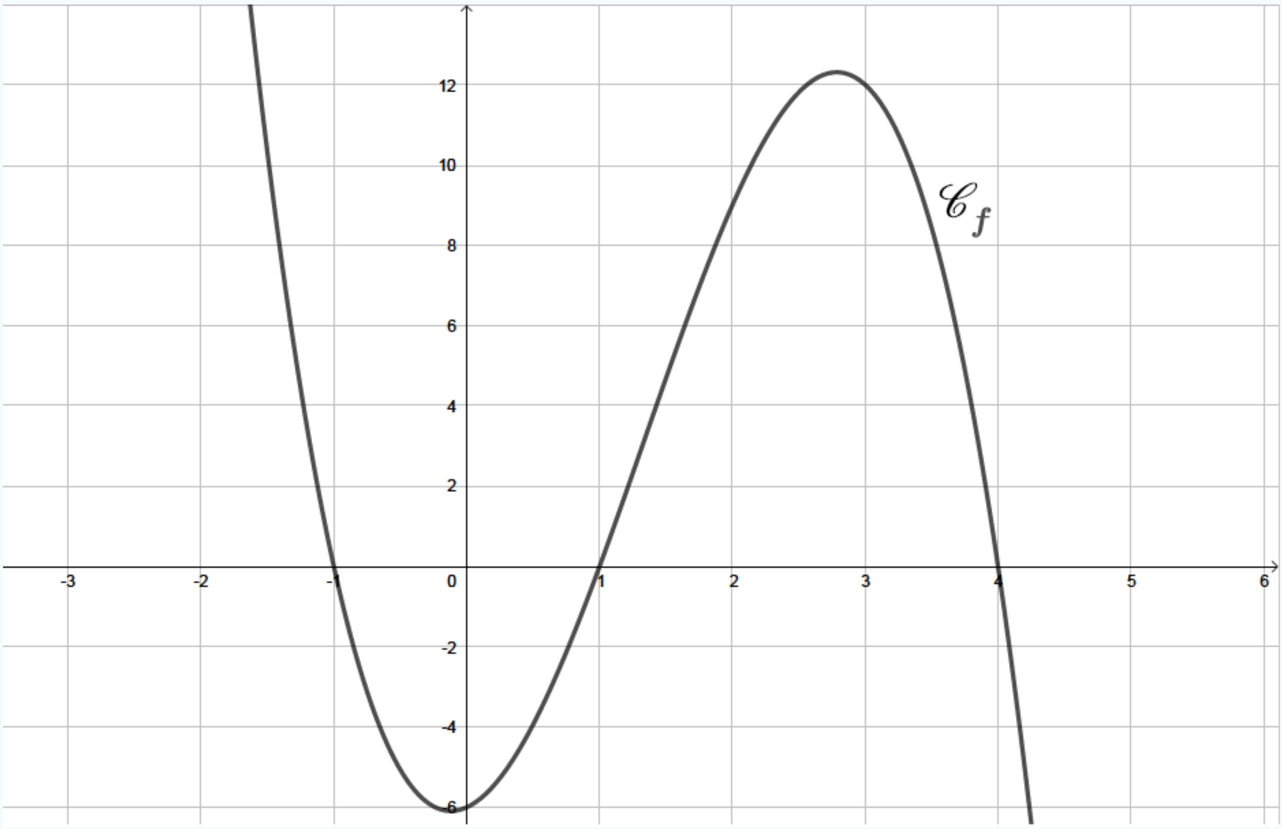


Dans ce cas précis, les racines de h sont : 1, $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

↬↬ 2ième cas : si $q^2+\frac{4p^3}{27}<0$

Dans ce cas l'équation $t^2 - qt - \dfrac{p^3}{27} = 0$ à deux racines complexes distinctes conjuguées l'une de l'autre, notées t_1 et t_2. Donc u^3 et v^3 sont deux nombres complexes conjugués l'un de l'autre. Il s'ensuit que u et v sont également deux nombres complexes conjugués l'un de l'autre. Comme la somme de deux sont deux nombres complexes conjugués l'un de l'autre vaut deux fois leur partie réelle, on a donc $u + v$ qui est une quantité purement réelle. Donc, aux trois déterminations possibles de u (car il y a trois racines cubiques possibles pour le complexe u^3), on obtient trois valeurs réelles différentes pour $x = u + v$, et de fait, également trois valeurs réelles différentes pour $z = x - \dfrac{b}{3a}$. Cette situation correspond à l'existence de trois racines réelles différentes.

C'est le cas pour le polynôme f d'expression $X^3 - 4X^2 - X + 4$ dont le graphe est :



Dans ce cas précis, les racines de f sont : -1, 1 et 4.

↬↬↬ 3ième cas : si $q^2 + \dfrac{4p^3}{27} = 0$

Dans ce cas l'équation $t^2 - qt - \dfrac{p^3}{27} = 0$ à une racine double, et $u^3 = v^3 = -\dfrac{q}{2}$. Si u est réelle et vaut $u = \alpha \in \mathbb{R}$ alors $v = u = \alpha$ et l'une des racines recherchées est $x = u + v = 2\alpha$. On trouve que l'autre racine est $-\alpha$ (qui est une racine double).

C'est le cas pour le polynôme g d'expression $-X^3+3X+2$ dont le graphe est :

Dans ce cas précis, les racines de g sont : -1, -1 (-1 est la racine double) et 2.

▼▼▼▼ Equation du quatrième degré

La méthode de $Ferrari$ fût imaginée et mise au point en 1540, par le mathématicien italien

$Ludovico\,Ferrari$ $(1522-1565)$. Elle permet de résoudre par radicaux les équations du quatrième degré.

On commence par diviser tous les coefficients de l'équation initiale par le coefficient dominant afin de normaliser l'équation initiale pour obtenir une équation du type :

$z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$

Il est possible de factoriser cette équation. On pose $\lambda\in\mathbb{K}$, et on a la factorisation suivante :

$$\left(z^2+\frac{a}{2}z+\lambda\right)^2-\left[\left(2\lambda-b+\frac{a^2}{4}\right)z^2+(a\lambda-c)\,z+\lambda^2-d\right]$$

Puis, on détermine λ pour que l'expression $\left(2\lambda - b + \frac{a^2}{4}\right) z^2 + (a\lambda - c)\, z + \lambda^2 - d$ soit un **carré parfait**. Il s'agit d'un polynôme du second degré en z, dont le discriminant doit être nul. Ceci nous conduit à la condition :

$$(a\lambda - c)^2 - 4\left(2\lambda - b + \frac{a^2}{4}\right)\left(\lambda^2 - d\right) = 0$$

Il s'agit d'une équation du troisième degré. Pour chacune des valeurs de λ alors trouvées, le terme $\left(z^2 + \frac{a}{2} z + \lambda\right)^2$ est un produit de facteurs du second degré, et la résolution devient possible, même si cela est (souvent) laborieux.

▼▼▼▼▼ Equation de degré supérieur ou égal à cinq

Depuis les travaux du mathématicien français $Evariste\, Galois$ $(1811 - 1832)$, on sait qu'il est **impossible** de trouver des formules générales de résolution pour des équations de degré supérieur ou égal à cinq.