Applications et fonctions

1 Applications et fonctions

a. Définition d'une application

- Soit E et F deux ensembles. Une application a de E dans F est la donnée d'une processus de correspondance qui à **tout** élément x de E permet d'associer un **unique** élément y de F. Cet élément y est alors noté $y = a(x)$. L'ensemble E est alors appelé ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée. Et il est d'usage d'adopter les écritures suivantes

  $a : E \longrightarrow F$

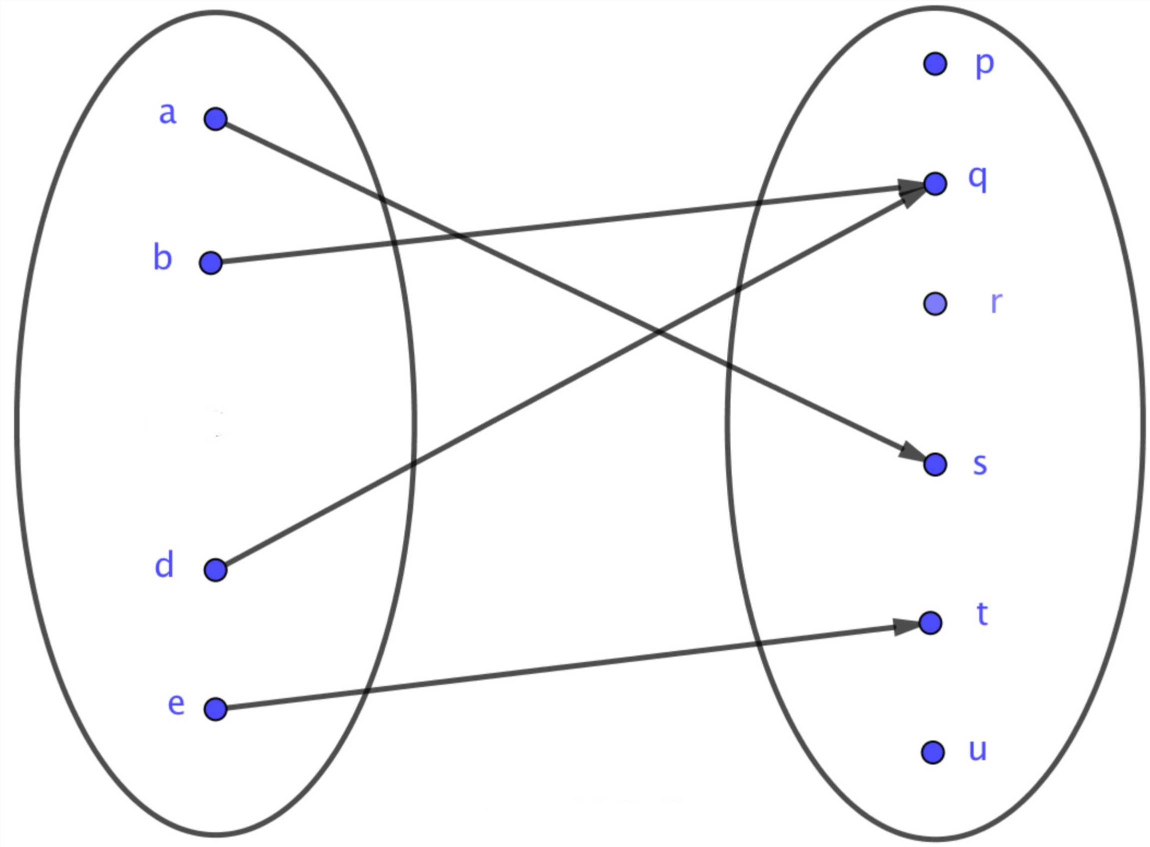
  ou encore

  $$a : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y = a(x) \end{array} \right.$$

  On dit que $y = a(x)$ est l'image de $x \in E$ par la correspondance a.

  On dit également que, s'il existe, que l'élément x, tel que $y = a(x)$, est l'antécédent de y par la correspondance a.

  Une application se représente par le diagramme sagittal suivant :



On note par $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E vers F. Parfois, on utilise également l'écriture F^E au lieu de $\mathcal{F}(E, F)$.

b. Définition d'une fonction

- Soit E et F deux ensembles. Une fonction f de E dans F est la donnée d'une processus de correspondance qui à **un** élément x de E permet d'associer **au plus un** élément y de F. Cet élément y est alors noté $y = f(x)$. L'ensemble E est alors appelé ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée. Et il est d'usage d'adopter les écritures suivantes

  $f : E \longrightarrow F$

  ou encore

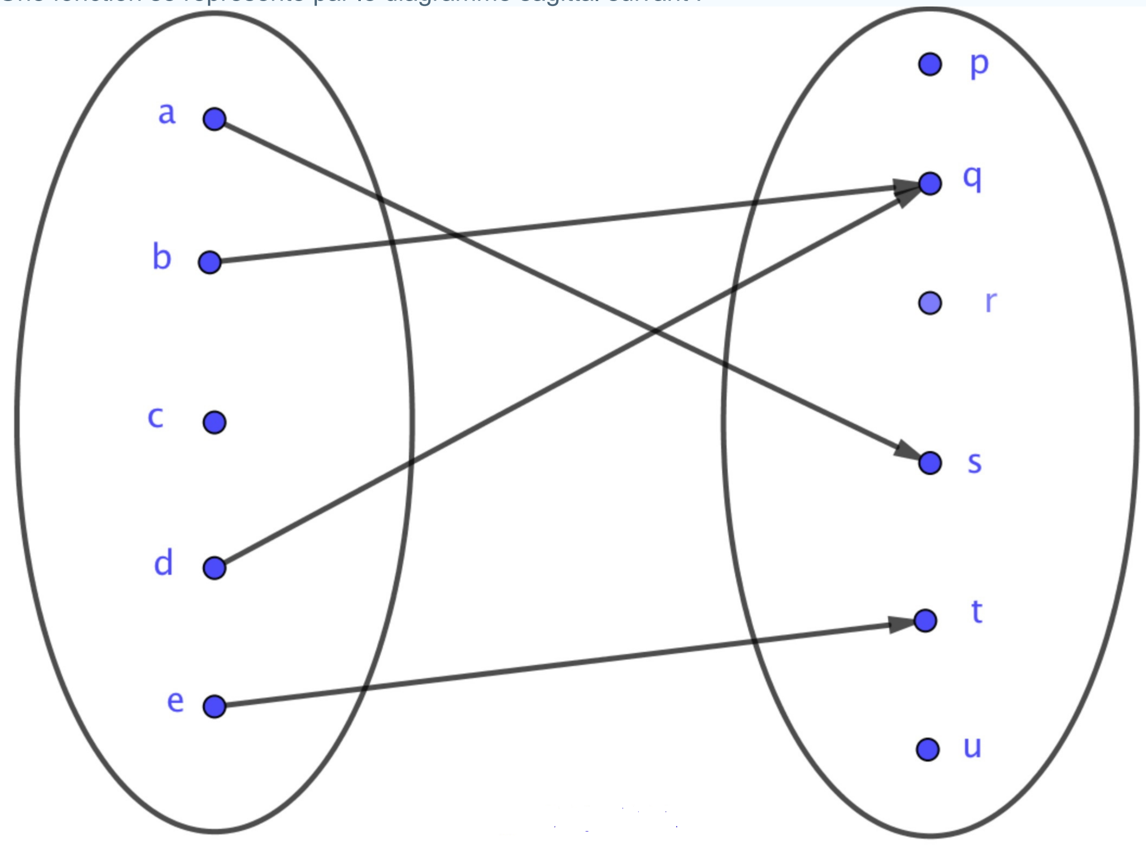
  $$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \right.$$

  On dit que $y = f(x)$ est l'image de $x \in E$ par la correspondance f.

On dit également que, s'il existe, que l'élément x, tel que $y = f(x)$, est l'antécédent de y par la correspondance f.

On appelle **ensemble de définition** de la fonction f, noté $\mathcal{D}_f$, le sous-ensemble de E qui contient tous les éléments x qui admettent une image $y = f(x)$. Donc $\mathcal{D}_f \subseteq E$; le cas $\mathcal{D}_f = E$ implique que la fonction f est alors une application.

Une fonction se représente par le diagramme sagittal suivant :

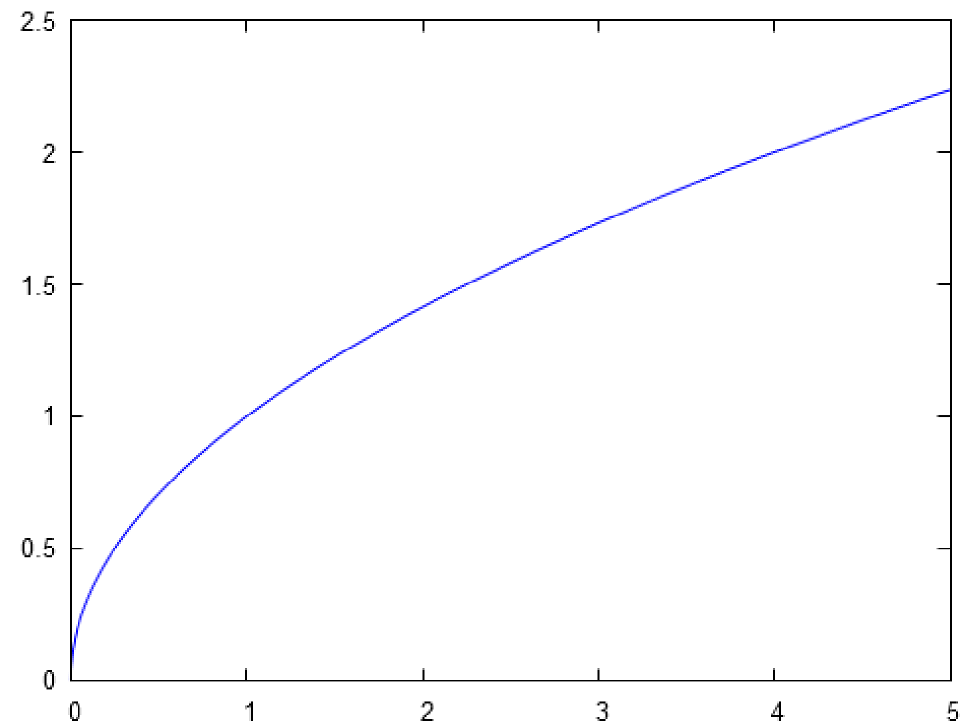


Et dans ce cas, on a $\mathcal{D}_f = \{a\,;\,b\,;\,d\,;\,e\}$ et $E = \{a\,;\,b\,;\,c\,;\,d\,;\,e\}$. Ainsi on a $\mathcal{D}_f \subset E$.

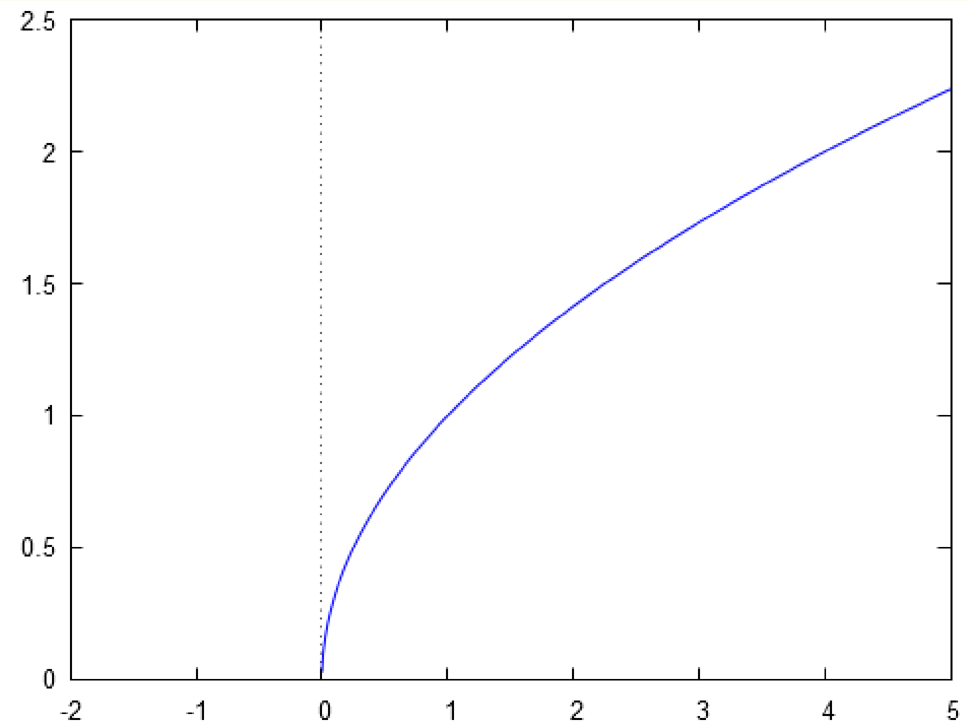
Pour bien comprendre la différence, illustrons ceci par un exemple simple donc pédagogique.

$\triangleleft$ **Exemples :**

L'objet a : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & y = \sqrt{x} \end{array} \right.$ est une application et se représente par :

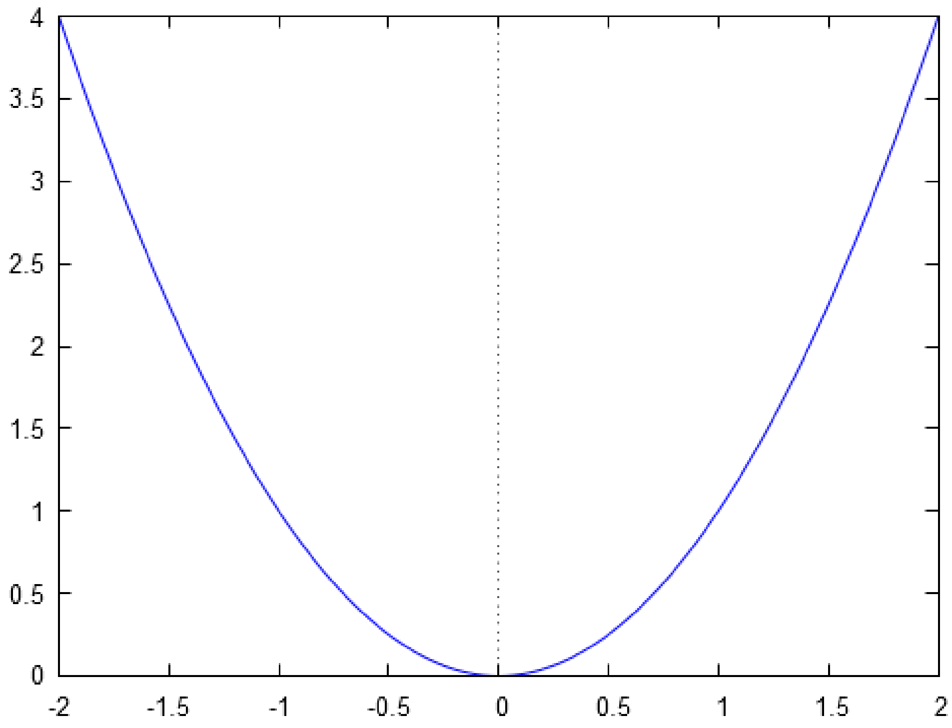


Mais l'objet a : $\left\{\begin{array}{rcl} [-2\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & y=\sqrt{x} \end{array}\right.$ est une fonction et se représente par :

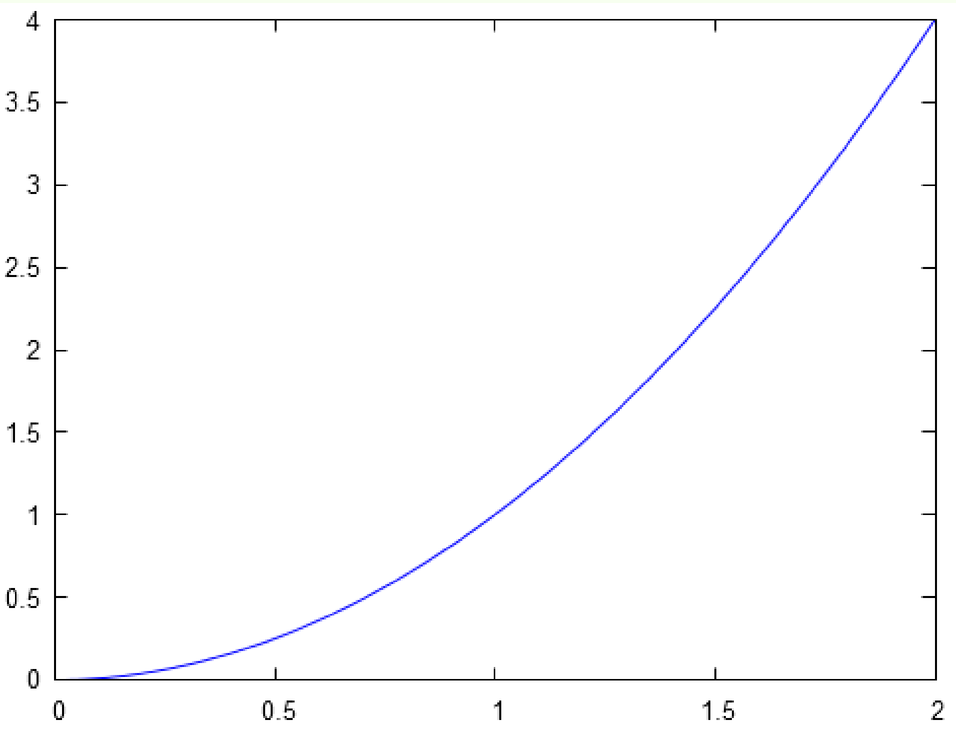


En résumé, une application est une fonction dont chaque élément de l'ensemble de départ correspond à une unique image, par contre une fonction n'est pas toujours définie sur son ensemble de départ. Chaque application est une fonction, mais la réciproque n'est pas toujours vraie !
Une application se compose de trois éléments : l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et le processus de correspondance entre $x \in E$ et $y \in F$. Si on change un de ces trois éléments, alors on change l'application et de fait on change ses propriétés. Illustrons ceci.

L'application a : $\left\{\begin{array}{rcl} E=[-2\,;\,2] & \longrightarrow & F=\mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & y=x^2 \end{array}\right.$ se représente par :



Mais, l'application b : $\left\{ \begin{array}{ccc} E = [0\,;\,2] & \longrightarrow & F = \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & y = x^2 \end{array} \right.$ se représente par :



Cet exemple nous permet d'aborder la notion de restriction. Soit $a : E \longrightarrow F$. Une application b définie sur une partie $A \subset E$ par **le même processus de correspondance**, et donc telle que $b(x) = a(x)$, est appelée la **réstriction** de a à A. On la note alors $b = a_{|A}$, et se lit "b est la restriction de a à A" ou encore "b est la restreinte de a à A".

c. Compositions des applications

- On considère les deux applications f et g suivantes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \right.$$

et

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & y = g(x) \end{array} \right.$$

Notons que l'ensemble d'arrivée de f et le même que l'ensemble de départ de g.

On commence par transformer $x \in E$ par f pour obtenir $f(x) \in F$. Puis on transforme $f(x) \in F$

par g pour obtenir $g\big(f(x)\big) \in G$.

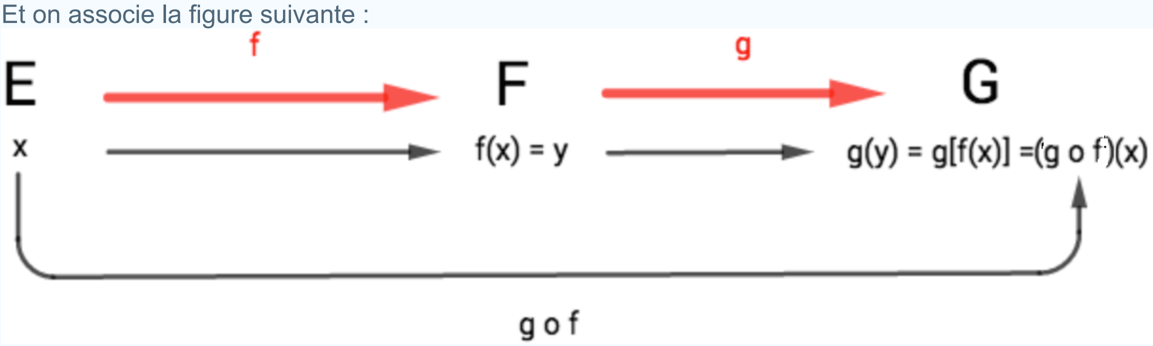
On définit ainsi la composée $g \circ f$ par :

$$\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Et on a :

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & y = g\big(f(x)\big) \end{array} \right.$$

Et on associe la figure suivante :



La composition des application $\mathbf{n'est\ pas\ une\ opération\ commutative}$. Si on considère

les deux applications f et g, alors on a :

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Par exemple. On considère les deux applications f et g suivantes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) = x+1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = g(x) = x^2 \end{array} \right.$$

Dans ce cas :

$$f \circ g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = (f \circ g)(x) = x^2 + 1 \end{array} \right. \quad \text{et}$$

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = (g \circ f)(x) = (x+1)^2 \end{array} \right.$$

La composition des applications est une opération associative. Si f, g et h sont trois applications, on a alors :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

On définit **l'application identité** sur l'ensemble E, notée Id_E, par :

$$\forall x \in E, \ \mathrm{Id}_E(x) = x$$

ou encore :

$$\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & y = \mathrm{Id}_E(x) = x \end{array} \right.$$

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications. On a alors :

$$f \circ \mathrm{Id}_E = f \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_E \circ g = g$$

2 Injections, surjections, bijections

a. Injection

- Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est une injection , ou que f est injective, si tout élément y de F admet au plus un antécédent x de E.

  Autrement dit, l'équation $f(x) = y$ admet, au plus, une solution $x \in E$.

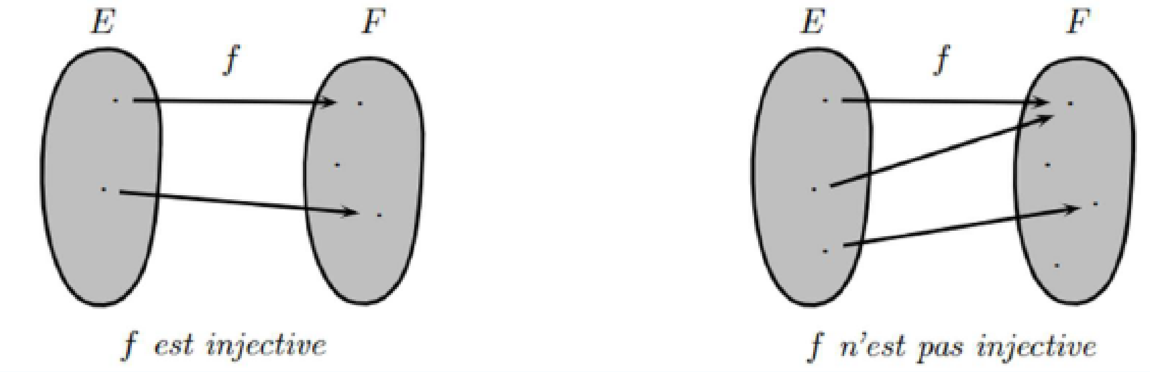
  Ceci se traduit donc par l'assertion :

$$\forall(x_1\,;\,x_2)\in E\times E,\ \left(f(x_1)=f(x_2)\right)\implies(x_1=x_2)$$

ou en prenant la contraposée :

$$\forall(x_1\,;\,x_2)\in E\times E,\ (x_1\neq x_2)\implies\left(f(x_1)\neq f(x_2)\right)$$

Graphiquement, on a :



◁ **Exemple :** Par exemple, on considère l'application $\exp:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & y=\exp(x)=e^x\end{array}\right.$

Soit x_1 et x_2 deux nombres réels. On a :

$$\left(f(x_1)=f(x_2)\right)\implies\left(\exp(x_1)=\exp(x_2)\right)\implies\left(\ln(\exp(x_1))=\ln(\exp(x_2))\right)\implies(x_1=x_2)$$

Donc l'application $\exp$ est injective.

◁ **Remarque :**

Pour une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ l'injectivité se traduit graphiquement par le fait que la droite horizontale

$y=i\in\mathbb{R}$ à au plus un point d'intersection avec la représentation graphique de l'application considérée.

En outre, la composée de deux applications injectives est elle même injective.

Si $f\circ g$ est injective alors on peut affirmer que g est injective.

b. Surjection

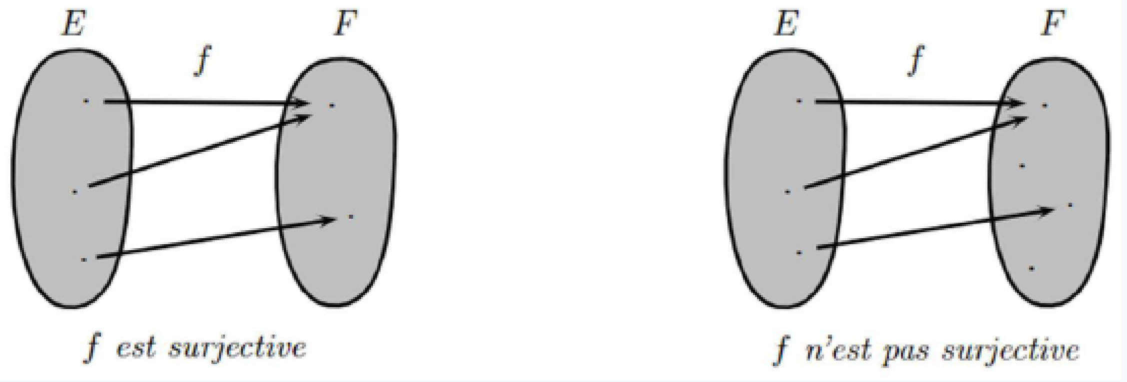
- Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est une surjection , ou que f est surjective, si tout élément y de F admet au moins un antécédent x de E. On a alors $f(E) = F$.

  Autrement dit, l'équation $f(y) = x$ admet, au moins, une solution $x \in E$.

  Ceci se traduit donc par l'assertion :

  $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$

  Graphiquement, on a :



$\triangleleft$ **Exemple :** Par exemple, on considère l'application $c : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = x^2 \end{cases}$

Soit $y = x^2$ un nombre réel. On a :

$(y = x^2) \Longrightarrow (\pm\sqrt{y} = x)$

Ainsi à chaque image y il est possible d'associer au moins un antécédent : $\sqrt{y}$ ou $-\sqrt{y}$. Donc l'application c est surjective.

$\triangleleft$ **Remarque :**

Pour une application de $\mathbb{R}$ dans F la surjectivité se traduit graphiquement par le fait que la droite horizontale $y = s \in F$ à au moins un point d'intersection avec la représentation graphique de l'application considérée.

En outre, la composée de deux applications surjectives est elle même surjective.

Si $f \circ g$ est surjective alors on peut affirmer que f est surjective.

c. Bijection

- Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est une bijection , ou que f est bijective, si tout

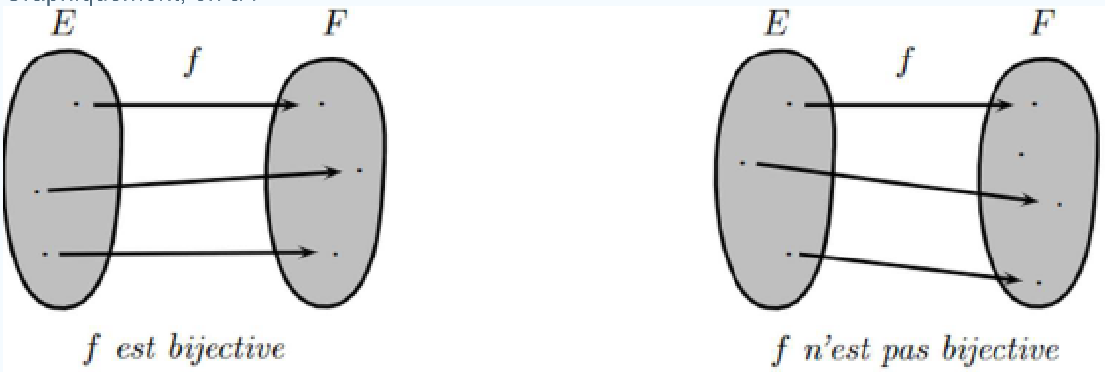
  élément y de F admet un unique antécédent x de E. On a alors $f(E) = F$.

  Autrement dit, l'équation $f(y) = x$ admet une unique solution $x \in E$.

  Ceci se traduit donc par l'assertion :

  $\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ y = f(x)$

  Ce qui signifie qu'une application est bijective si elle est à la fois injective et surjective.
  Graphiquement, on a :



$\triangleleft$ **Exemple :** Par exemple, on considère l'application c : $\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = x^3 \end{array} \right.$

Soit $y = x^3$ un nombre réel. On a :

$(y = x^3) \Longrightarrow (\sqrt[3]{y} = x)$

Ainsi à chaque image y il est possible d'associer un unique antécédent : $\sqrt[3]{y}$.

Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}$ un antécédent, alors $y = x^3$ est l'unique image associée à l'antécédent x.

Donc l'application c est bijective.

Considérons à nouveau l'application $\exp$: $\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \exp(x) = e^x \end{array} \right.$

Soit x un nombre réel, et soit $y = \exp(x)$ l'image de x. On a :

$$\big(y = \exp(x)\big) \Longrightarrow \big(\ln(y) = \ln(\exp(x))\big) \Longrightarrow \big(\ln(y) = x\big)$$

Donc l'application $\exp$ est bijective. Ainsi cette application $\exp$ est également surjective. Nous avions démontrer précédemment qu'elle était injective.

$\triangleleft$ Remarque :

Pour une application de $\mathbb{R}$ dans F la bijectivité se traduit graphiquement par le fait que la droite horizontale $y = b \in F$ à un unique point d'intersection avec la représentation graphique de l'application considérée.

Un théorème couramment utilisé est qu'une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et strictement croissante réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image par f.

En outre, la composée de deux applications bijectives est elle même bijective.

Si $f \circ g$ est bijective alors on peut affirmer que f est surjective et que g est injective.