Cours sur la logique

1 Eléments de logique.

a. Définition

Définition 1

- Une $\textit{proposition}$, encore appelée $\textit{assertion}$ (ou encore $\textit{prédicat}$), est un énoncé mathématique

  qui ne peut prendre que deux états (ou valeurs de vérité) : vrai (V) ou faux (F).

  On appelle tautologie une proposition qui est toujours vraie.
  On appelle contradiction une proposition qui est toujours fausse.
  Un théorème, ou une proposition, est une proposition mathématique toujours vraie.

b. Négation d'une proposition

Définition 2

- La $\textit{négation}$ d'une proposition P est notée $non\ P$ ou $\neg P$. Ainsi :

  ● Si P est vraie alors $\neg P$ est faux ;

  ●● Si P est faux alors $\neg P$ est vraie.

  La table de vérité associée est :

P	$\neg P$
V	F
F	V

  Il ne faut pas confondre la négation de P avec le contraire de P.

c. Conjonction de deux propositions

Définition 3

- La $conjonction$ de deux propositions P et Q est notée $P\ et\ Q$ ou $P \wedge Q$. Ainsi :

  - Si P est vraie et en même temps Q est vraie alors $P \wedge Q$ est vraie ;

  - Si au moins l'une des deux propositions participantes est fausse alors $P \wedge Q$ est faux.

  La table de vérité associée est :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

d. Disjonction inclusive de deux propositions

Définition 4

- La $disjonction\ (inclusive)$ de deux propositions P et Q est notée $P\ ou\ Q$ ou $P \vee Q$. Ainsi :

  - Si au moins l'une des deux propositions participantes est vraie alors $P \vee Q$ est vraie ;

  - Si P est fausse et en même temps Q est également fausse alors $P \vee Q$ est fausse.

  La table de vérité associée est :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disjonction exclusive ne peut pas se traduire par "ou bien".

e. L'implication

Définition 5

- $L'implication$ de Q par P est notée $P \Longrightarrow Q$ et est la proposition $\neg P \vee Q$. L'assertion vraie

  $P \Longrightarrow Q$ peut se traduire par :

  ↬ P implique Q ;

- P entraine Q ;
- si on a P alors on a Q ;
- Q est la conséquence de P ;
- Q est une condition nécessaire pour que l'on ait P ;
- Pour qu'on ait P il faut (et il est nécessaire) qu'on ait Q ;
- P est une condition suffisante pour qu'on ait Q ;
- Pour que l'on ait Q il suffit (il est suffisant) qu'on ait P.

On prendra garde de ne pas confondre $\Longrightarrow$ avec "alors" ou avec "donc".

La table de vérité associée est :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$\lhd$ **Exemple :**

Considérons l'assertion $x \geqslant 2 \Longrightarrow x^2 \geqslant 4$. Le fait d'avoir $x \geqslant 2$ est suffisant pour avoir $x^2 \geqslant 4$.

Cependant la condition $x \geqslant 2$ n'est pas une nécessité pour avoir $x^2 \geqslant 4$, car si nous posons $x = -2$ (qui ne satisfait pas à $x \geqslant 2$) on a pourtant bien $x^2 \geqslant 4$. Ainsi pour que $x^2 \geqslant 4$ il suffit d'avoir $x \geqslant 2$, mais ce n'est pas nécessaire car il y a d'autre moyen d'arriver à la conclusion $x^2 \geqslant 4$.

Le fait de constater que $x^2 \geqslant 4$ est nécessaire (obligatoire) pour pouvoir affirmer que $x \geqslant 2$.

f. La contraposée

Définition 6

- La *contraposée* de $P \implies Q$ est la proposition $\neg Q \implies \neg P$.

g. La réciproque

Définition 7

- La *réciproque* de $P \implies Q$ est la proposition $Q \implies P$.

g. L'équivalence

Définition 8

- L'*équivalence* de Q par P est notée $P \iff Q$ et est la proposition $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$.

L'assertion vraie $P \iff Q$ peut se traduire par :

↬ P est équivalent à Q ;

↬ P équivaut Q ;

↬ on a P si et seulement si on a Q ;

↬ P est une condition nécessaire et suffisante pour avoir Q.

La table de vérité associée est :

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Deux assertions sont équivalentes si elles possèdent les mêmes tables de vérités.
On a les cinq tautologies suivantes :

• $\neg(\neg P) \iff P$;

•• $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$;

••• $\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$;

•••• $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$;

●●●●● $P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

Les quatre dernières relations portent le nom de lois de $Morgan$.

En outre, on a également :

● l'assertion $P \wedge \neg P$ est toujours fausse (principe de non contradiction) ;

●● l'assertion $P \vee \neg P$ est toujours vraie (principe ddu tiers exclu).

Rajoutons, à cette liste, la règle du détachement (ou règle d'inférence, ou encore règle du modus ponens) :

● $(P \wedge (P \Longrightarrow Q)) \Longrightarrow Q$.

Et rajoutons une équivalence bien utile (qui se vérifie simplement par les tables de vérités) lors des démonstrations avec des assertions :

●● $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg P \vee Q)$

★★ Démonstrations

Il existe différent type (ou méthodes) de démonstrations qui reposent sur ces éléments de logiques.

$1-$ Démonstrer $P \Longrightarrow Q$

Il y a deux manières de démontrer l'implication $P \Longrightarrow Q$. La première est de supposer P vraie et de démontrer que, sous cette hypothèse, le proposition Q est également vraie.

◁ Exemple :

Voici un exemple classique. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrons que n impair $\Longrightarrow n^2$ impair.

On suppose que n est impair, donc l'entier naturel n peut s'écrire sous la forme $n = 2p + 1$ $(p \in \mathbb{N})$.

Dans ce cas on a $n^2 = (2p+1)^2$. En développant l'identité remarquable, on obtient

$n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$. Posons $q = 2p^2 + 2p = 2p(p+1)$. Comme $p \in \mathbb{N}$ cela signifie que $2p(p+1) \in \mathbb{N}$, d'où $q \in \mathbb{N}$. De fait, $2q + 1 \in \mathbb{N}$ et est donc impair. On peut alors conclure que que n^2 est un nombre entier naturel impair. ■ (Ce petit symbole ■ signifie simplement que la démonstation est terminée).

Le deuxième méthode pour démontrer l'implication $P \Longrightarrow Q$ est de démontrer sa contraposée. En effet, on a l'équivalence logique $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$. Pour illustrer ce principe de démonstration, enisageons le célèbre exemple dans lequep P repésente la propposition $il\, pleut$ et Q représente la proposition $je\, prends\, mon\, parapluie$. On observe immédiatement que $P \Longrightarrow Q$ car si $il\, pleut$ alors $je\, prends\, mon\, parapluie$. Mais nous pouvons également remarquer que "si il ne pleut pas alors je ne prends pas mon parapluie". Ce qui s'identifie à $\neg Q \Longrightarrow \neg P$.

◁ **Exemple :**

Voici un exemple classique. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrons que n^2 pair $\Longrightarrow n$ pair.

Notons par P la proposition n^2 pair, et désignons par Q la proposition n pair. Nous cherchons à démontrer que $P \Longrightarrow Q$. La proposition contraposée $\neg Q \Longrightarrow \neg P$ s'identifie à n impair $\Longrightarrow n^2$ impair. La démonstration de la contraposée à été réalisée dans l'exemple précédent. Ce qui achève la démonstration, et nous pouvons affirmer que n^2 pair $\Longrightarrow n$ pair. ■

★★ Démonstrations

2 − Démonstrer $P \Longleftrightarrow Q$

Pour démontrer $P \Longleftrightarrow Q$ on doit impérativement vérifier les deux sens ! On commence, dans un premier temps, par vérifier l'implication directe (c'est-à-dire la condition nécessaire) $P \Longrightarrow Q$, puis dans un second temps, on vérifie l'implication réciproque (c'est-à-dire la condition suffisante).

$\triangleleft$ **Exemple :**

Un exemple classique et pédagogique. Soit x et m deux nombres réels. Démontrons que l'expression $f(x) = mx + 1$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$.

• Implication directe : la condition nécessaire

Si $m = 0$ alors $f(x) = 1 > 0$. Dans ce cas, pour tout x réel, $\text{signe}(f(x)) = \text{signe}(1)$ et de fait, pour tout x réel, $\text{signe}(f(x)) = +$. Ainsi le signe de l'expression $f(x)$ est constant sur $\mathbb{R}$.

•• Implication réciproque : la condition suffisante

Réciproquement, pour montrer que si l'expression $f(x)$ conserve un signe constant alors $m = 0$ nous allons utiliser la contraposée associée (expliquée ci-avant dans l'implication), à savoir : si $m \neq 0$ alors l'expression $f(x)$ change de signe.

Donc, si $m \neq 0$ alors $f(x) = m\left(x + \dfrac{1}{m}\right) = m\left(x - \left(-\dfrac{1}{m}\right)\right)$. On constate alors qu'il y a changement de signe de l'expression $f(x)$ lorsque $x = -\dfrac{1}{m}$. Par conclusion de la méthode de la contraposée, nous pouvons donc affirmer que si l'expression $f(x)$ conserve un signe constant alors $m = 0$.

• • • Conclusion

Nous avons bien démontrer les deux implications, directe et réciproque, et nous pouvons donc conclure que l'expression $f(x) = mx + 1$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$. $\blacksquare$

★★ Démonstrations

3 – Démontrer par l'absurde

Le principe de la démonstration par l'absurde s'appuie sur la règle logique suivante, que le lecteur pourra vérifier sans peine par les tables de vérités : $((\neg P \implies Q) \wedge (\neg P \implies \neg Q)) \iff P$.

Dans la pratique, pour démontrer que P est vraie, on va supposer la négation, à savoir que P est fausse, et on cherche alors une contradiction engendrée par l'hypothèse "P est fausse". Ainsi P est nécessairement vraie.

$\triangleleft$ **Exemple :**

Démontrons classiquement que le nombre $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

On rappelle que les nombres irrationnels sont représentés par $\mathbb{Q}\prime$ et sont les nombres dont le développement décimal est infini et non périodique. Autrement dit, un nombre irrationnel est un nombre réel qui n'est pas rationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction $\dfrac{a}{b}$, où a et b sont deux entiers relatifs (avec b non nul).

Nous cherchons à démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. C'est pourquoi nous allons faire l'hypothèse $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ et chercher une contradiction engendrée.
Si $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, où a et b sont deux entiers relatifs (avec b non nul). On peut supposer que la fraction $\dfrac{a}{b}$ soit irréductible. Ceci signifie que les nombres a et b n'ont pas de diviseur commun, autre que 1.

En passant au carré, on a $\sqrt{2}^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$. Donc $a^2 = 2b^2$. Ceci signifie que a^2 est pair, ce qui implique a est également pair (voir ci-dessus l'exemple de la démonstration par contraposée). Ainsi a est un multiple de 2, et on pose $a = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. On a alors $4p^2 = 2b^2$, soit $2p^2 = b^2$, et donc b^2 est une quantité paire, et donc b est également pair. D'où $b = 2q$ avec $q \in \mathbb{N}$. On constate que les deux nombres a et b sont pairs, donc ils admettent un diviseur commun qui est 2. Cette constatation est une $contradiction$ aux fait que la fraction $\dfrac{a}{b}$ soit irréductible. Donc notre hypothèse initiale, à savoir $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}, est fausse.$ On en conclut donc que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, autrement dit $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, c'est un nombre irrationnel. $\blacksquare$

★★ Démonstrations

$4-$ Démontrer par récurrence

Soit $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n. Ce type de démonstration s'applique aux propositions dont l'énoncé dépend d'un entier naturel n. Pour montrer une proposition de la forme $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$, il est souvent plus efficace d'utiliser une démonstration par récurrence plutôt qu'une démonstration classique.

La propriété de récurrence est ici présentée comme une conséquence de la construction de l'ensemble $\mathbb{N}$ (mais il faut savoir qu'elle peut à son tour servir de base à cette même construction; on change, dans ce cas, de jeu d'axiomes).
Elle s'appuie sur le théorème d'arithmétique suivant :

Toute partie X (et $x \in X$) de $\mathbb{N}$ qui vérifie les deux propriétés

(1) $0 \in X$,

(2) $\forall x \in x+1 \in \mathbb{N}$,

est identique à $\mathbb{N}$.

Dans la pratique, cette méthode s'exprime et s'articule en trois étapes :

$\bullet$ Etape 1 : L'initialisation

Soit n_0 le plus petit entier naturel auquel on peut vérifier la propriété P. On vérifie alors que $P(n_0)$ est effectivement vraie.

$\bullet\bullet$ Etape 2 : La transmission

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n > n_0$. On fait la supposition que $P(n)$ est vraie, et sous cette hypothèse, on démontre que $P(n+1)$ est également vraie. Autrement dit, l'objectif de cette deuxième étape est de démontrer l'implication

$P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

$\bullet\bullet\bullet$ Etape 3 : La conclusion

On écrit "En vertu des axiomes de la récurrence, la propriété $P(n)$: ... est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, ce qui achève la démonstration ■".

$\triangleleft$ **Exemple :**

Démontrons par récurrence que nous avons la propriété $P(n)$, avec $n \in \mathbb{N}^\star$ suivante :

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

• Etape 1 : L'initialisation

On vérifie la propriété P pour $n = 1$. On a effectivement :

$$P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

•• Etape 2 : La transmission

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n > 1$. On fait la supposition que $P(n)$ est vraie, à savoir que nous avons la propriété $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Dans ce cas, examinons la vérité de $P(n+1)$. On a donc, sous l'hypothèse que $P(n)$ soit vraie :

$$P(n+1) : 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

A savoir :

$$P(n+1) : 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right)$$

Soit :

$$P(n+1) : 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

Soit encore :

$$P(n+1) : 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Qui s'écrit également sous la forme :

$$P(n+1) : 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

On peut donc affirmer que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est également vraie.

• • • Etape 3 : La conclusion

En vertu des axiomes de la récurrence, la propriété $P(n) : 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, ce qui achève la démonstration $\blacksquare$.

2 Les quantificateurs logiques.

a. Définition

Définition 1

- **★★★ Les quantificateurs logiques**

  Le domaine de validité d'une assertion, ou tout au moins certaines parties de ce domaine, jouant un rôle fondamental. Dès lors une notion de quantification s'introduit naturellement et, avec elle, les **quantificateurs** qui permettent, lorsqu'ils sont bien utilisés, certains automatismes de raisonnement.

  Le *quantificateur universel* est représenté par le symbole $\forall$, et il signifie **pour tout**. Ainsi l'écriture mathématique suivante

  $\forall x \in E,\ P(x)$ se traduit par **pour tout** x appartenant à l'ensemble E, la propriété $P(x)$ est vraie. On dit également **quelque soit** x de l'ensemble E, on a la propriété $P(x)$.

  Le *quantificateur existentiel* est représenté par le symbole $\exists$, et il signifie **il existe**. Ainsi l'écriture mathématique suivante

  $\exists x \in E,\ P(x)$ se traduit par **il existe** *au moins un* x appartenant à l'ensemble E, qui rend la propriété $P(x)$ vraie.

  L'écriture $\exists!$ signifie **il existe un unique**. Ainsi l'écriture mathématique suivante

  $\exists! x \in E,\ P(x)$ se traduit par **il existe** *un unique* x appartenant à l'ensemble E, qui rend la propriété $P(x)$ vraie.

  La négation de $\forall x \in E,\ P(x)$ est définie par :

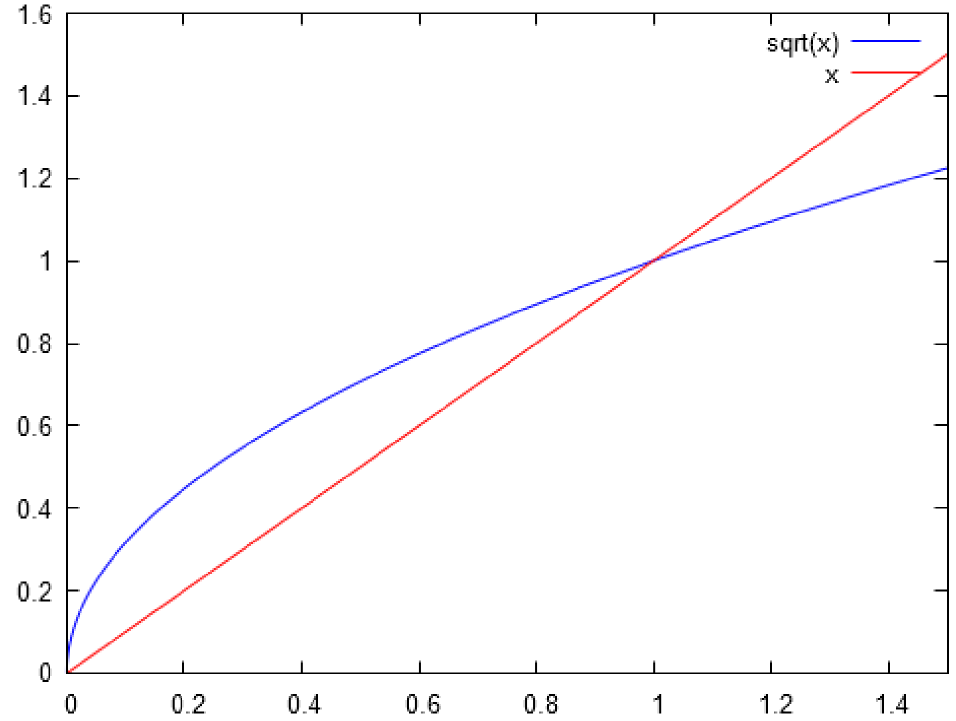
$$\neg\left(\forall x \in E,\ P(x)\right) \Longleftrightarrow \exists x \in E,\ \neg P(x)$$

La négation de $\exists x \in E,\ P(x)$ est définie par :

$$\neg\left(\exists x \in E,\ P(x)\right) \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ \neg P(x)$$

$\triangleleft$ **Exemple :**

La négation de $\exists x \in]0\,;\,1[,\ \sqrt{x} > x$ est $\forall x \in]0\,;\,1[,\ \sqrt{x} < x$. Le première assertion est vraie, et donc sa négation, la seconde, est fausse. En effet on vérifie ceci facilement par les graphes représentatifs :



En effet, prenons $x = 0,5 \in]0\,;\,1[$. On a bien $\sqrt{0,5} > 0,5$. Donc, il existe bien au moins une valeur de x dans l'intervalle $]0\,;\,1[$ qui permet d'affirmer que $\sqrt{x} > x$.

A ceci, rajoutons la négation (très souvent utile) suivante :

$$\neg\left(\forall x \in E, P(x) \Longrightarrow Q(x)\right) \Longleftrightarrow \exists x \in E, P(x) \wedge \neg Q(x)$$

► Remarquons que pour démontrer que la proposition $\forall x \in E,\ P(x)$ est fausse, il est possible (et suffisant) de trouver un **contre exemple**. Autrement dit, trouver un élément x de l'ensemble E qui rend la propriété $P(x)$ vraie.

◁ **Exemple :**

On considère $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \Longrightarrow x > 1$. La négation est donc :

$\neg\left(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \Longrightarrow x > 1\right) \Longleftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \text{ et } x \leqslant 1$

On constate que le choix $x = -2 \in \mathbb{R}$ permet de donner la vérité fausse à $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \Longrightarrow x > 1$,

et de fait offre la vérité vraie à $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \text{ et } x \leqslant 1$. Donc $x = -2 \in \mathbb{R}$ est **contre exemple**.

3 Compléments.

★★★★ **Compléments**

On note par P, Q et R trois assertions.

On a l'équivalence entre $P \wedge (Q \wedge R)$ et $P \wedge Q \wedge R$.

On a l'équivalence entre $P \wedge (Q \vee R)$ et $P \vee Q \vee R$.

Il ne faut pas confondre $P \Longrightarrow Q \Longrightarrow R$ avec $P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)$. En effet, on a :

$(P \Longrightarrow Q \Longrightarrow R) \Longleftrightarrow ((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R))$

Egalement, **il ne faut pas confondre** $P \Longleftrightarrow Q \Longleftrightarrow R$ avec $P \Longleftrightarrow (Q \Longleftrightarrow R)$. En effet, on a :

$(P \Longleftrightarrow Q \Longleftrightarrow R) \Longleftrightarrow ((P \Longleftrightarrow Q) \wedge (Q \Longleftrightarrow R))$

Dans la pratique des exercices, pour montrer la validité de $(P \Longleftrightarrow Q) \wedge (Q \Longleftrightarrow R)$ il est bien plus **économique** de montrer que la relation assertionnelle

$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R) \wedge (R \Longrightarrow P)$ est vraie. C'est **la démonstration circulaire**.

Notons, au passage, que les écritures $P \Longrightarrow Q \Longrightarrow R$ et $P \Longleftrightarrow Q \Longleftrightarrow R$ sont abusives, mais elles sont tolérées.

Les opérations logiques, $\vee$ et $\wedge$, sont **idempotentes**. C'est à dire qu'elles satisfont à la propriété :

$\looparrowright$ $P \vee P \Longleftrightarrow P$

$\looparrowright$ $P \wedge P \Longleftrightarrow P$

Indiquons également que (mais c'est $logique$) l'on a l'équivalence suivante :

$\looparrowright$ $\big((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)\big) \Longleftrightarrow (P \Longrightarrow R)$

Cette dernière relation s'appelle **la transitivité de l'implication**.