Les racines carrées d'un nombres complexes

1 Les racines carrées d'un nombre complexe.

a. Définition.

Définition

Tout nombre complexe Z non nul admet deux racines carrées opposées.

Posons $Z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on cherche $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z^2 = Z$.

Alors :

$$z^2 = Z \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & x^2 - y^2 \\ \sqrt{a^2 + b^2} & = & x^2 + y^2 \\ b & = & 2xy \end{array} \right.$$

Démonstration :

Soit i le nombre complexe imaginaire tel que $i^2 = 1$. Une méthode simple pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe Z de forme algébrique $Z = a + ib$ (ou a et b sont des réels) est de poser $z = x + iy$ (ou x et y sont des réels) puis de résoudre le système d'équations à deux inconnues qui en résulte :

$$Z = z^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a + ib = (x + iy)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a + ib = x^2 - y^2 + i2xy \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & x^2 - y^2 \\ b & = & 2xy \end{array} \right.$$

De plus, l'égalité initiale $Z = z^2$ nous donne, en module, $|Z| = |z^2| = |z|^2$. Ainsi on a :

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{x^2 + y^2}^2 = x^2 + y^2$$

On a alors les trois équations de déterminations suivantes :

$$\begin{cases} a & = & x^2 - y^2 \\ \sqrt{a^2+b^2} & = & x^2 + y^2 \\ b & = & 2xy \end{cases}$$

La somme, membres à membres, des deux premières nous conduit à :

$$\sqrt{a^2+b^2} + a = 2x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$$

Puis, la soustraction, membres à membres, de la deuxième moins la première nous conduit à :

$$\sqrt{a^2+b^2} - a = 2y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

La troisième équation, à savoir $b = 2xy$, doit être utiliser au travers du signe des deux membres. En effet :

$$\text{signe}(b) = \text{signe}(2xy)$$

Mais comme $2 > 0$, on a alors :

$$\text{signe}(b) = \text{signe}(xy)$$

Cette dernière condition permet de savoir si x et y sont de même signe (si $b > 0$) ou de signes opposés (si $b > 0$). C'est comme cela que les deux racines carrées z se construisent par rapport aux deux choix des signes de x et y, et ces deux racines carrées sont opposées l'une de l'autre.

Le cas particulier $b = 0$ implique que $Z = a$ est un réel pur. Auquel cas, il est évident que :

- si $a > 0$ alors les deux racines carrées recherchées sont $z = \sqrt{a}$ et $z = -\sqrt{a}$;
- si $a < 0$ alors les deux racines carrées recherchées sont $z = i\sqrt{-a}$ et $z = -i\sqrt{-a}$;
- si $a = 0$ alors les deux racines carrées recherchées sont identiques, et on a $z = 0$.