Cours sur les racines carrées

1 Calculs sur les racines carrées

a. Définition

- La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif dont le carré est a . On la note $\sqrt{a}$.

Exemple :

- $4^2 = 16$ et donc $\sqrt{16} = 4$

Remarque : Il en résulte donc que $\sqrt{-3}$ est une écriture incorrecte. En effet, il n'existe pas de nombre réel ayant pour carré -3.

2 Règles de calcul

a. Propriétés sur les racines carrées

Propriétés

- Soit a un réel positif alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

- Pour tout réel a : $\sqrt{a^2} = |a|$

- Ainsi, si $a \geq 0$ alors $\sqrt{a^2} = a$, et si $a \leq 0$ alors $\sqrt{a^2} = -a$.

Exemples :

- $\sqrt{8^2} = 8$
- $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$
- $\left(\sqrt{\frac{5}{11}}\right)^2 = \frac{5}{11}$
- $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}$
- $\sqrt{(-6)^2} \neq -6$ en effet : $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{6^2} = 6$
- $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} = \left|1-\sqrt{3}\right| = \sqrt{3} - 1$ car $1 - \sqrt{3} < 0$

b. Les racines de carrés parfaits

$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{25}=5$
$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{64}=8$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{100}=10$

c. Racine carrée d'un produit

Propriété

- Soient a et b deux réels positifs alors : $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

Exemples :

- $\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{3\times 5}=\sqrt{15}$
- $\sqrt{22}=\sqrt{2\times 11}=\sqrt{2}\times\sqrt{11}$

Démonstration : Soient a et b deux réels positifs.

Le nombre $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ est positif, comme produit de deux nombres positifs.

Son carré vaut : $\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2\times\left(\sqrt{b}\right)^2=a\times b.$

Ainsi $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est le nombre positif dont le carré est $a \times b$: c'est, par définition, la racine carrée de $a \times b$.

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

d. Racine carrée d'un quotient

Propriété

- Soient a et b deux réels positifs avec $b \neq 0$ alors : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemples :

- $\sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$
- $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$

e. Attention à la racine carrée d'une somme

Remarque

- En général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

- Contre-exemple : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.
- Plus précisément, pour tous réels a et b strictement positifs :

  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (démontré dans les exercices types).

3 Calculs sur les racines carrées

a. Écrire une somme sous la forme $a\sqrt{b}$

- Il faut factoriser l'expression à l'aide du facteur commun $\sqrt{b}$.

Exemple : Simplifier l'expression $A = 3\sqrt{5} - 8\sqrt{5} + 11\sqrt{5}$

$A = 3\sqrt{5} - 8\sqrt{5} + 11\sqrt{5}$. Nous allons factoriser par $\sqrt{5}$.

$A = (3 - 8 + 11) \times \sqrt{5}$

$A = 6\sqrt{5}$

b. Écrire un nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ en utilisant les carrés parfaits

Méthode

- Il faut faire apparaitre un carré parfait dans l'expression se trouvant sous la racine carrée.

Exemple : $B = \sqrt{48}$

$B = \sqrt{16 \times 3}$. Nous avons fait apparaitre un carré parfait, ici en l'occurrence 16 .

$B = \sqrt{16} \times \sqrt{3}$. On a appliqué la formule $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

$B = 4 \times \sqrt{3}$. On a simplifié la racine du carré parfait .

Finalement : $B = 4\sqrt{3}$