Cours sur les puissances

1 Calculs sur les puissances

a. Définition

- Soit n un entier naturel non nul.
- Pour tout réel a, le nombre a à la puissance n, noté a^n, est défini par :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$$

- Pour tout réel a non nul, on pose : $a^0 = 1$

2 Règles de calcul

a. Première formule

Propriété

- Soient n et m deux entiers relatifs et a un réel non nul alors :

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

Exemple : Exprimer sous la forme d'une seule puissance : $A = 7^2 \times 7^3$

$A = 7^2 \times 7^3$

$A = 7^{2+3}$

Ainsi : $A = 7^5$

b. Deuxième formule

Propriété

- Soient n et m deux entiers relatifs et a un réel non nul alors :

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Exemple : Exprimer sous la forme d'une seule puissance : $B = \dfrac{5^8}{5^2}$

$B = \dfrac{5^8}{5^2}$

$B = 5^{8-2}$

Ainsi : $B = 5^{6}$

c. Troisième formule

Propriété

- Soient n et m deux entiers relatifs et a un réel non nul alors :

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

Exemple : Exprimer sous la forme d'une seule puissance : $C = \left(6^{-3}\right)^4$

$C = \left(6^{-3}\right)^4$

$C = 6^{(-3)\times 4}$

Ainsi : $C = 6^{-12}$

d. Quatrième formule

Propriété

- Soient n un entier relatif et a et b deux réels non nuls alors :

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Exemple : Exprimer sous la forme d'une seule puissance : $D = 4^2 \times 5^2$

$D = 4^2 \times 5^2$

$D = (4 \times 5)^2$

Ainsi : $D = 20^2$

e. Cinquième formule

Propriété

- Soient n un entier relatif et a un réel non nul alors : $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$

Exemple : Exprimer sous la forme d'une seule puissance : $E = \dfrac{1}{4^6}$

$E = \dfrac{1}{4^6}$

Ainsi : $E = 4^{-6}$

3 Un calcul qui résume tout

Exemple : Exprimer sous la forme d'une seule puissance : $F = \dfrac{2^3 \times \left(2^4\right)^5}{2^4 \times 2^{-7}}$

$F = \dfrac{2^3 \times \left(2^4\right)^5}{2^4 \times 2^{-7}}$ équivaut successivement à :

$F = \dfrac{2^3 \times 2^{4\times 5}}{2^4 \times 2^{-7}}$

$F = \dfrac{2^3 \times 2^{20}}{2^4 \times 2^{-7}}$

$F = \dfrac{2^{3+20}}{2^{4+(-7)}}$

$F = \dfrac{2^{3+20}}{2^{4-7}}$

$F = \dfrac{2^{23}}{2^{-3}}$

$F = 2^{23-(-3)}$

$F = 2^{23+3}$

Ainsi : $F = 2^{26}$

4 Comparer deux nombres

Méthode

- **Par la différence :** pour comparer deux réels a et b, on étudie le signe de $a - b$. Si $a - b > 0$ alors $a > b$; si $a - b < 0$ alors $a < b$.
- **Par le quotient :** lorsque a et b sont strictement positifs, on compare $\frac{a}{b}$ à 1. Si $\frac{a}{b} > 1$ alors $a > b$; si $\frac{a}{b} < 1$ alors $a < b$.

Exemple : Comparer $A = 2^{30}$ et $B = 3^{20}$.

A et B sont strictement positifs. On écrit les deux nombres avec le même exposant :

$A = 2^{30} = 2^{3\times 10} = \left(2^3\right)^{10} = 8^{10}$ et $B = 3^{20} = 3^{2\times 10} = \left(3^2\right)^{10} = 9^{10}$

$$\frac{A}{B} = \frac{8^{10}}{9^{10}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{10}$$

Or $0 < \frac{8}{9} < 1$, donc ses puissances sont aussi comprises entre 0 et 1 : $\frac{A}{B} < 1$. Ainsi

: $2^{30} < 3^{20}$

5 Algorithme : première puissance qui dépasse une valeur

Méthode

- Pour trouver le plus petit entier naturel n tel que $a^n > S$ (avec $a > 1$), on calcule les puissances successives $a^0 = 1, a^1, a^2 \ldots$ en multipliant à chaque étape par a, tant que la puissance obtenue reste inférieure ou égale à S.

```
def premiere_puissance(a, seuil):
    n = 0
    p = 1
    while p <= seuil:
        p = p * a
        n = n + 1
    return n
```

Exemple : l'appel premiere_puissance(2, 1000) renvoie 10 car $2^9 = 512 \leq 1\,000$ et $2^{10} = 1\,024 > 1\,000$.