Ce qu'il faut savoir sur la fonction logarithme népérien

1 La fonction logarithme népérien

a. Fonction réciproque de la fonction exponentielle

Définition 1

- Pour tout réel y strictement positif, l'équation $e^x = y$ admet une unique solution, notée $\ln(y)$.
- On définit ainsi une nouvelle fonction sur $]0;+\infty[$, qui a pour tout réel y appartenant à $]0;+\infty[$ associe $\ln(y)$, l'unique solution de l'équation $e^x = y$.
- La fonction logarithme népérien est la $\text{fonction réciproque}$ de la fonction exponentielle.

Définition 2 : Conséquences

- Pour tout réel $y > 0$ et pour tout réel x, on a : $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$
- Pour tout réel $x > 0$, on a : $e^{\ln(x)} = x$
- Pour tour réel x, on a : $\ln(e^x) = x$

b. Relation fonctionnelle du logarithme népérien

Définition 3

- Pour tous réels x et y strictement positifs : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

Exemple : Exprimer en fonction de $\ln(3)$ et $\ln(5)$ le nombre $\ln(15)$.

$\ln(15) = \ln(3 \times 5) = \ln(3) + \ln(5)$

c. Les autres propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

Définition 4

Pour tous réels x et y strictement positifs :

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- Pour tout entier relatif n, on a : $\ln(x^n) = n\ln(x)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

2 Etude de la fonction logarithme népérien

a. Dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x)$

Définition 5

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

Conséquence : La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

b. Equations et logarithme népérien

Définition 6

Pour tous réels x et y strictement positifs : $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(4x-8) = \ln(x)$.

Il faut commencer par déterminer la domaine de validité de l'équation.

L'équation est définie si et seulement si :

$$\begin{cases} 4x-8>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x>8 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{8}{4} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>0 \end{cases}$$

On fait l'intersection des deux intervalles, ainsi le domaine de définition (de validité de l'équation) est

$D_f =]2;+\infty[$

Soit $x>2$, il vient alors :

$\ln(4x-8) = \ln(x)$ équivaut successivement à :

$4x-8=x$

$4x-x=8$

$3x=8$

$x=\frac{8}{3}$

or $\frac{8}{3} \in]2;+\infty[$.

La solution de l'équation $\ln(4x-8) = \ln(x)$ est alors $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$.

c. Inéquations et logarithme népérien

Définition 7

- Pour tous réels x et y strictement positifs : $\ln(x) \leq \ln(y) \Leftrightarrow x \leq y$
- Pour tous réels x et y strictement positifs : $\ln(x) \geq \ln(y) \Leftrightarrow x \geq y$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(x-3) \geq 0$.

Il faut commencer par déterminer la domaine de validité de l'inéquation.

L'inéquation est définie si et seulement si : $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

Le domaine de définition (de validité de l'inéquation) est

$D_f =]3;+\infty[$

Soit $x > 3$, il vient alors :

$$\ln(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x-3) \geq \ln(1) \Leftrightarrow x-3 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 4$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(x-3) \geq 0$ est alors $S = [4;+\infty[$.

3 Limites avec la fonction logarithme népérien

a. Les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction logarithme népérien

Définition 8

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

b. Croissance comparée des fonctions logarithme

Définition 9

Pour tout nombre entier n strictement positif, on a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

Définition 10

Pour tout nombre entier n strictement positif, on a :

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$