Ce qu'il faut savoir sur les équations différentielles $y' = ay + b$

1 Les équations différentielles

a. Définition

Définition 1

- Une équation différentielle est une équation où l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction.

2 Equation différentielle $y' = ay + b$

Définition 2

Soit l'équation différentielle $y' = ay + b$ où a et b sont deux réels, avec $a \neq 0$, et où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme : $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est une constante réelle.
- La fonction $f_0(x) = -\frac{b}{a}$ est appelée solution particulière constante de l'équation différentielle.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' = 4y - 1$

On identifie ici que : $a = 4$ et $b = -1$.

Il en résulte que les solutions de l'équation sont alors : $f(x) = ke^{4x} - \frac{(-1)}{4}$ où k est une constante réelle.
Finalement :

$$f(x) = ke^{4x} + \frac{1}{4}$$

où k est une constante réelle.

3 Equation différentielle $y' = ay + b$ avec condition initiale

Définition 3

Soit l'équation différentielle $y' = ay + b$ où a et b sont deux réels, avec $a \neq 0$, et où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme : $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est une constante réelle.
- Quels que soient les réels x_0 et y_0, l'équation $y' = ay + b$ admet une unique solution f prenant en x_0 la valeur y_0 telle que $f(x_0) = y_0$.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' = 2y + 4$ tel que $f(0) = 10$.

On identifie ici que : $a = 2$ et $b = 4$.

Il en résulte que les solutions de l'équation sont alors : $f(x) = ke^{2x} - \frac{4}{2}$ où k est une constante réelle.

Finalement : $f(x) = ke^{2x} - 2$ où k est une constante réelle

Or on sait que $f(0) = 10$, il vient alors que :

$f(0) = 10$ équivaut successivement à :

$ke^{2\times 0} - 2 = 10$

$ke^{0} - 2 = 10$ or $e^{0} = 1$

$k - 2 = 10$

$k = 10 + 2$

D'où : $k = 12$

Il en résulte que la solution de l'équation différentielle $y' = 2y + 4$ tel que $f(0) = 10$ est alors :

$f(x) = 12e^{2x} - 2$