

# Ce qu'il faut savoir sur les équations différentielles $y' = ay$

## ① Les équations différentielles

### a. Définition

#### Définition 1

- Une **équation différentielle** est une équation où l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction.

## ② Equation différentielle $y' = ay$

#### Définition 2

Soit  $a$  un réel non nul.

Soit l'équation différentielle  $y' = ay$  où  $a$  est un réel avec  $a \neq 0$ , et où  $y$  est une fonction de la variable  $x$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme :  $f(x) = ke^{ax}$  où  $k$  est une constante réelle.

**Exemple :** Résoudre l'équation différentielle suivante :  $y' = 2y$

On identifie ici que :  $a = 2$ .

Il en résulte que les solutions de l'équation sont alors :  $f(x) = ke^{2x}$  où  $k$  est une constante réelle.

Finalement :

$$f(x) = ke^{2x}$$

où  $k$  est une constante réelle.

### ③ Equation différentielle $y' = ay$ avec condition initiale

#### Définition 3

Soit  $a$  un réel non nul.

Soit l'équation différentielle  $y' = ay$  où  $a$  est un réel avec  $a \neq 0$ , et où  $y$  est une fonction de la variable  $x$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme :  $f(x) = ke^{ax}$  où  $k$  est une constante réelle.
- Quels que soient les réels  $x_0$  et  $y_0$ , l'équation  $y' = ay$  admet une unique solution  $f$  prenant en  $x_0$  la valeur  $y_0$  telle que  $f(x_0) = y_0$ .

**Exemple :** Résoudre l'équation différentielle suivante :  $y' = 4y$  tel que  $f(0) = 2$ .

On identifie ici que :  $a = 4$ .

Il en résulte que les solutions de l'équation sont alors :  $f(x) = ke^{4x}$  où  $k$  est une constante réelle.

Or :  $f(0) = 2$  ce qui nous permet d'écrire que :

$ke^{4 \times 0} = 2$  équivaut successivement à :

$ke^0 = 2$ . Nous savons que  $e^0 = 1$ .

$$k = 2$$

Il en résulte que la solution de l'équation différentielle  $y' = 4y$  tel que  $f(0) = 2$  est alors :

$$f(x) = 2e^{4x}$$