Ce qu'il faut savoir sur les équations différentielles $y' = ay$

1 Les équations différentielles

a. Définition

Définition 1

- Une **équation différentielle** est une équation où l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction.

2 Equation différentielle $y' = ay$

Définition 2

Soit a un réel non nul.

Soit l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un réel avec $a \neq 0$, et où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme : $f(x) = ke^{ax}$ où k est une constante réelle.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' = 2y$

On identifie ici que : $a = 2$.

Il en résulte que les solutions de l'équation sont alors : $f(x) = ke^{2x}$ où k est une constante réelle.

Finalement :

$f(x) = ke^{2x}$

où k est une constante réelle.

3 Equation différentielle $y' = ay$ avec condition initiale

Définition 3

Soit a un réel non nul.

Soit l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un réel avec $a \neq 0$, et où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme : $f(x) = ke^{ax}$ où k est une constante réelle.
- Quels que soient les réels x_0 et y_0, l'équation $y' = ay$ admet une unique solution f prenant en x_0 la valeur y_0 telle que $f(x_0) = y_0$.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' = 4y$ tel que $f(0) = 2$.

On identifie ici que : $a = 4$.

Il en résulte que les solutions de l'équation sont alors : $f(x) = ke^{4x}$ où k est une constante réelle.

Or : $f(0) = 2$ ce qui nous permet d'écrire que :

$ke^{4\times 0} = 2$ équivaut successivement à :

$ke^{0} = 2$. Nous savons que $e^{0} = 1$.

$k = 2$

Il en résulte que la solution de l'équation différentielle $y' = 4y$ tel que $f\left(0\right) = 2$ est alors :

$f\left(x\right) = 2e^{4x}$