Ce qu'il faut savoir sur les primitives

1 Primitives

a. Théorème fondamental

Définition 1

- f est une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet une primitive sur I si, et seulement si, il existe une fonction F dérivable sur I dont la dérivée est f .
- Ainsi, pour tout réel x de I, on a : $F'(x) = f(x)$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x$. Déterminer une primitive de f.

Soit une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $F(x) = 3x^2$. F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

En effet :

$$F'(x) = 6x$$

.

Définition 2

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Définition 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

- Si F est une primitive de f sur I, alors les primitives de f sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto F(x) + k$ où k est une constante réelle.

- Si $x_0 \in I$ et $y_0 \in I$, f admet une unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.

Exemple : Déterminer la primitive F de la fonction $f(x) = 6x$ tel que $F(1) = 8$.

Les primitives de f sont alors de la forme $F(x) = 3x^2 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Or $F(1) = 8$ ainsi : $3 \times 1^2 + k = 8 \Leftrightarrow k = 8 - 3 \Leftrightarrow k = 5$

Finalement :

$F(x) = 3x^2 + 5$

2 Les primitives usuelles à connaître

a. Le tableau des primitives usuelles

Fonction f	**Une primitive de F**	**Domaine de validité I**
$f(x)=m$ Avec $m\in\mathbb{R}$	$F(x)=mx$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln x$	$]0\,;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^n}\quad n\neq 1$	$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	$\mathbb{R}$

b. Le tableau des primitives des fonctions composées

Fonction f	**Une primitive de F**
$u'(x)u(x)^n$ Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}u(x)^{n+1}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x)$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$u'(x)\cos u(x)$	$\sin u(x)$
$u'(x)\sin u(x)$	$-\cos u(x)$

2 Exemples de calculs de primitives

Exemple 1 :

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$f(x) = -3x + 5x^2 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{\sqrt{x}} - 2$. On obtient alors :

$$F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + 4\ln(x) - \left(-\frac{2}{x}\right) + 3 \times 2\sqrt{x} - 2x + k \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + 4\ln(x) + \frac{2}{x} + 6\sqrt{x} - 2x + k \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Exemple 2 : Primitive de la forme $\frac{u'}{u^2}$

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $\left]\frac{2}{5};+\infty\right[$ par $f(x) = \frac{6}{(5x-2)^2}$

Nous pouvons écrire que : $f(x) = \frac{6}{(5x-2)^2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{6}{5} \times \frac{5}{(5x-2)^2}$

On obtient alors :

$F(x) = \frac{6}{5} \times \frac{-1}{5x-2} + k$ où $k \in \mathbb{R}$ d'où :

$F(x) = \frac{-6}{5(5x-2)} + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Exemple 3 : Primitive de la forme $\frac{u'}{u}$

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $]6;+\infty[$ par $f(x) = \frac{4}{3x-18}$

Nous pouvons écrire que : $f(x) = \frac{4}{3x-18} \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{3x-18}$

On obtient alors :

$F(x) = \frac{4}{3} \times \ln(|3x-18|) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Exemple 4 : Primitive de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $]7;+\infty[$ par $f(x) = \frac{9}{\sqrt{5x-35}}$

Nous pouvons écrire que : $f\left(x\right)=\dfrac{9}{\sqrt{5x-35}}\Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{9}{5}\times\dfrac{5}{\sqrt{5x-35}}$

On obtient alors :

$F\left(x\right)=\dfrac{9}{5}\times 2\times\sqrt{5x-35}+k$ où $k\in\mathbb{R}$ d'où :

$F\left(x\right)=\dfrac{18}{5}\times\sqrt{5x-35}+k$ où $k\in\mathbb{R}$

Exemple 5 : Primitive de la forme $u'u^n$

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $\left]-\infty;+\infty\right[$ par $f\left(x\right)=2\left(7x-1\right)^3$

Nous pouvons écrire que : $f\left(x\right)=2\left(7x-1\right)^3\Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{2}{7}\times 7\times\left(7x-1\right)^3$

On obtient alors :

$F\left(x\right)=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{3+1}\times\left(7x-1\right)^{3+1}+k$ où $k\in\mathbb{R}$ d'où :

$F\left(x\right)=\dfrac{1}{14}\times\left(7x-1\right)^4+k$ où $k\in\mathbb{R}$

Exemple 6 : Primitive de la forme $u'e^u$

Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $\left]-\infty;+\infty\right[$ par $f\left(x\right)=e^{-2x+3}$

Nous pouvons écrire que : $f\left(x\right)=e^{-2x+3}\Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{1}{-2}\times\left(-2\right)\times e^{-2x+3}$

On obtient alors :

$F\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}\times e^{-2x+3}+k$ où $k\in\mathbb{R}$